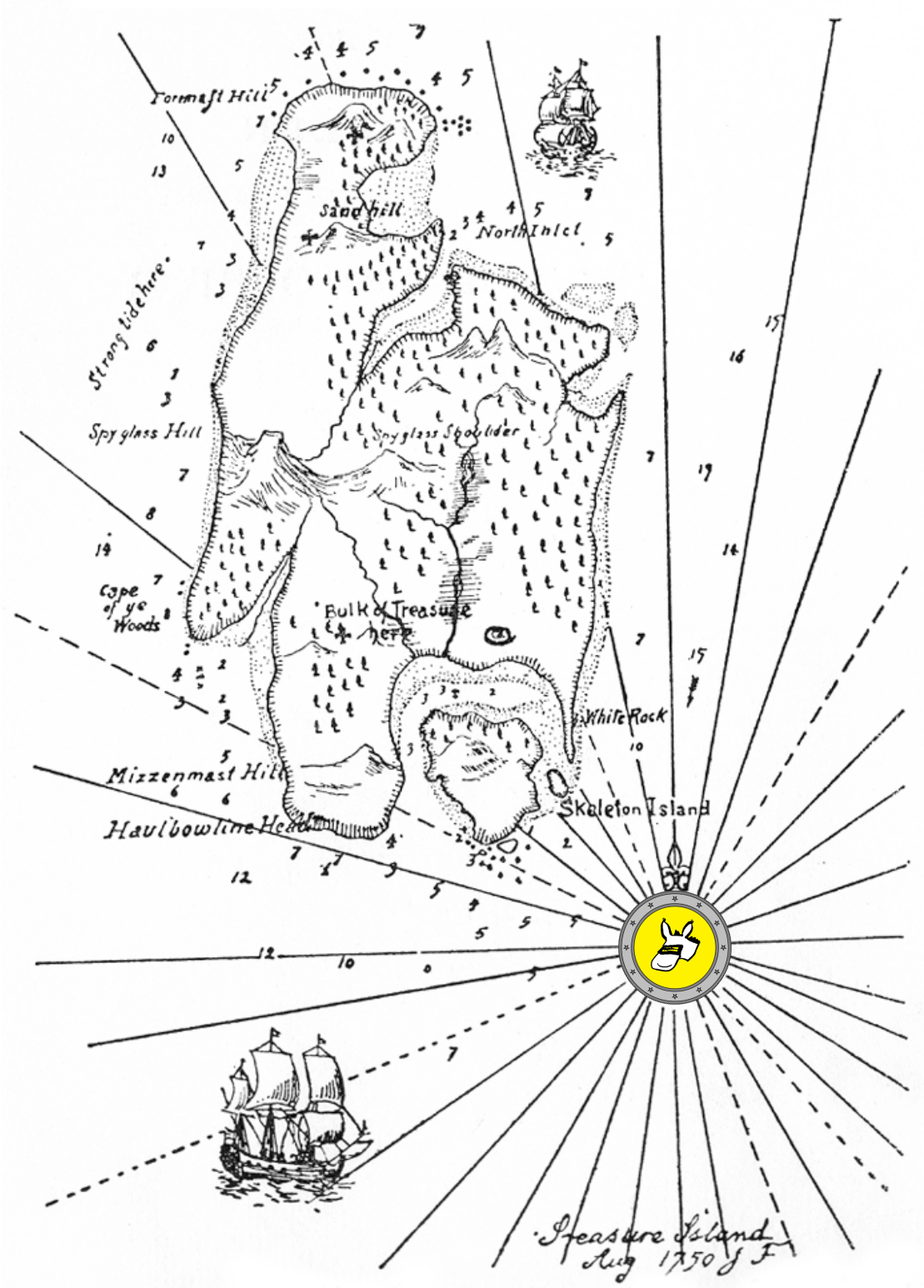
The Quantum Quest



Willkommen beim *Quantum Quest*!

Das Ziel dieses fünfwöchigen Abenteuers ist es, dir die Grundlagen der Quanteninformatik beizubringen. Am Ende der Reise wirst du verstehen, was Quantenbits und Quantenalgorithmen sind und wofür sie gut sind. Auf dem Weg wirst du Alice und Bob kennen lernen, die im Jahr 2058 leben und (genau wie du) an Quantencomputern basteln, wenn die Schule vorbei ist. Heutzutage sind Wissenschaftler:innen immer noch dabei, echte Quantencomputer in ihren Laboren zu bauen, aber im Jahr 2058 gibt es Quantencomputer überall – sogar in deiner Hosentasche! Leider gibt es auch Menschen, die diese Technologie für bösartige Zwecke nutzen wollen, also musst du deinen beiden Freund:innen – Alice und Bob – dabei helfen, sich vor der bösen Hackerin Eve zu beschützen. Viel Erfolg auf deinem Abenteuer!

Mit herzlichen Quantengrüßen,
Maris Ozols & Michael Walter

Leitfaden für Lesende

In diesen Vorlesungsnotizen findest du zahlreiche Übungsaufgaben (in grünen Kästen) sowie Hausaufgaben (in roten Kästen). Die Übungsaufgaben sind dazu gedacht, dein Wissen und Verständnis zu testen, während du liest. Lösungen für sie bekommst du immer am Ende einer Quest. Die Hausaufgaben dagegen sind dazu gedacht, am Ende jeder Woche abgegeben zu werden. Manche dieser Aufgaben sind als "optional" markiert – sie sind nicht notwendig um dem Kurs folgen zu können, aber bieten eine gute Möglichkeit weiter zu üben. Manche sind sogar als "herausfordernd" markiert – diese sind ein bisschen schwieriger als die anderen!

Danksagung

Wir möchten uns bei den folgenden Personen bedanken, die uns helfen, diesen Online-Kurs anzubieten: Doutzen Abma, Sebastian Bach, Valerie Bettaque, Amalia Böttger, Milo Camardese, Arjan Cornelissen, Bas Dirkse, Oliver Dorogi, Jari Egbers, Yassine Ferjani, Marten Folkertsma, Koen Groenland, Galina Pass, Philip Verduyn Lunel, Anurudh Peduri, Simon Schmidt, Quinten Tupker, Mees de Vries, Jordi Weggemans, Peter Ypma. Vielen Dank an Sebastian Bach für die deutschsprachige Übersetzung dieses Texts. Wir sind auch Craig Gidney äußerst dankbar, dessen Quantensimulator Quirk wir angepasst haben, um Quirky zu bauen. Zu guter Letzt wollen wir uns bei euch, all den enthusiastischen Schüler:innen bedanken, die an diesem Kurs teilgenommen haben!

Der Quantum Quest

Maris Ozols und Michael Walter

November 2023

Inhaltsverzeichnis

Quest 1: Maestro der Wahrscheinlichkeit

Willkommen in der ersten Woche des *Quantum Quest* – du stehst am Anfang eines spannenden Abenteuers!

Die Quanteninformatik ist ein faszinierendes Thema, das unsere Fantasie anregt. Diese Faszination kommt hauptsächlich von den seltsamen Regeln, denen die Quantenwelt zu folgen scheint. Da die Regeln uns aber so fremd sind und der Zustandsraum eines Quantencomputers exponentiell groß ist, kannst du dich leicht verirren. Um das zu verhindern, musst du dich zunächst mit der Welt der Wahrscheinlichkeiten vertraut machen. Sobald du dann ein Maestro der Wahrscheinlichkeit bist, wird sich die Tür der Quantenwelt für dich öffnen!

Das Ziel der ersten Quest ist es, dir Wahrscheinlichkeiten und probabilistische Bits näher zu bringen: Was ist ein probabilistisches Bit, in was für Zuständen kann es sich befinden, was für Operationen können wir anwenden, und wie können wir Informationen extrahieren, indem wir ein solches Bit "messen"? In der zweiten Quest wird es dann um Quantenbits gehen, welche sich sehr ähnlich zu probabilistischen Bits verhalten.

1.1 Probabilistische Bits

Wir benutzen Wahrscheinlichkeiten, wann immer eines von mehreren möglichen Ereignissen eintreten kann, wir aber noch nicht wissen, welches Ereignis tatsächlich eintreten wird – je wahrscheinlicher das Ereignis, desto höher dessen Wahrscheinlichkeit. Ein Ereignis welches auf jeden Fall eintritt, hat eine Wahrscheinlichkeit von 1 (also 100%), während ein Ereignis, das niemals eintritt, eine Wahrscheinlichkeit von 0 hat.

Wir können uns beispielsweise einen Münzwurf vorstellen. Wenn du eine Münze wirfst und sie, ohne sie anzuschauen, mit deiner Hand abdeckst, können zwei mögliche Ereignisse eintreten: entweder die "Kopf"-Seite zeigt nach oben, oder die "Zahl"-Seite zeigt nach oben. Bei einer *fairen* Münze sind beide Fälle gleich wahrscheinlich, also weisen wir beiden eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} = 0.50$, also 50%, zu (in Abb. 1.1 stellen wir diesen Fall als dar). Münzen können aber auch *unfair* (engl. *biased*) sein, also mit höherer Wahrscheinlichkeit auf einer der beiden Seiten landen. Je nachdem, wie unfair die Münze ist, man sich ein ganzes Spektrum an Möglichkeiten vorstellen: eine extrem unfaire Münze könnte immer mit der "Kopf"-Seite nach oben landen, eine andere dagegen vielleicht immer mit der "Zahl"-Seite (siehe und links und rechts in Abb. 1.1). Für die erste dieser beiden Münzen ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Zahl" dabei 0 (da es immer mit der "Kopf"-Seite nach oben landet), während für die andere Münze das Ereignis "Zahl" die Wahrscheinlichkeit 1 hat.

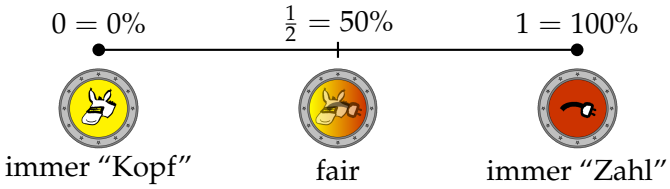


Abbildung 1.1: Ein probabilistisches Bit, das den Zustand einer zufälligen Münze beschreibt. Die "Kopf"-Seite ist mit einem Eselskopf beschriftet und die "Zahl"-Seite mit einem Eselsschwanz. (Wieso das? Anstatt von "Kopf und Zahl" spricht man im Englischen von "heads or tails"...)

Da wir uns keine Gedanken über die genaue Konstruktion von Münzen von verschiedener Form und Größe machen wollen, ist es sinnvoll, die Information, die einen Münzwurf beschreibt, zu abstrahieren. Das erreichen wir, indem wir die Ereignisse "Kopf" und "Zahl" mit

den Werten 0 und 1 eines Bits assoziieren. Dann lässt sich ein Münzwurf mit zwei Wahrscheinlichkeiten beschreiben: Der Wahrscheinlichkeit p_0, dass das Ergebnis 0 (“Kopf”) ist, und der Wahrscheinlichkeit p_1, dass das Ergebnis 1 (“Zahl”) ist. Ein solches Bit, welches seine beiden möglichen Werte mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten annimmt, wird als probabilistisches Bit bezeichnet. Beachte dabei, dass sich die beiden Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1 \geq 0$ notwendigerweise zu 1 aufaddieren müssen: $p_0 + p_1 = 1$. Wenn die Münze, wie im Beispiel oben, fair ist, dann muss, wie oben beschrieben, $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ gelten.

Ist dir aufgefallen, dass es ausreichen würde, nur eine der beiden Wahrscheinlichkeiten p_0 oder p_1 anzugeben, da beide durch die jeweils andere bestimmt werden? Der Klarheit halber werden wir aber immer beide angeben und die Wahrscheinlichkeiten als Vektor schreiben:

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Wir nennen diesen Vektor die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder den Zustand des probabilistischen Bits. Diese Vektornotation ist nicht nur praktisch, um alle Wahrscheinlichkeiten in einer schönen Tabelle darzustellen, sondern sie erlaubt es uns auch, ein probabilistisches Bit geometrisch zu visualisieren. Außerdem wird es uns helfen, Parallelen zwischen probabilistischen Bits und Quantenbits zu sehen.

Wir nennen die beiden Zustände, bei denen das Ergebnis immer 0 (“Kopf”, ) oder immer 1 (“Zahl”, ) lautet, deterministisch. Dies entspricht den oben diskutierten “extrem unfairen” Münzen, bei denen das Ergebnis des Münzwurfs von vornherein eindeutig bestimmt ist. In Gl. (1.1) korrespondieren diese Zustände zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ bzw. $p_0 = 0$, $p_1 = 1$. Da wir diese Zustände häufig benutzen, ist es sinnvoll, folgende Abkürzung einzuführen:

$$[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Diese Notation mag am Anfang ein wenig verwirren, aber du kannst dir $[0]$ und $[1]$ als  und  oder als [Kopf] und [Zahl] vorstellen, wenn du möchtest.

Diese zwei Zustände bilden eine Basis aller Zustände. Das bedeutet, das wir alle anderen Zustände als Linearkombination dieser beiden Zustände darstellen. Konkret:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0[0] + p_1[1]. \tag{1.3}$$

Da Zustände Vektoren sind, können wir sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem visualisieren. Die möglichen Zustände eines probabilistischen Bits entsprechen dann genau der Strecke zwischen den beiden Punkten $[0]$ und $[1]$, die den deterministischen Zuständen des Bits entsprechen (siehe Abb. 1.2).

Übungsaufgabe 1.1: Die blaue Strecke verstehen

Laut Abb. 1.2 bilden die möglichen Zustände eines probabilistischen Bits eine Strecke. Nimm dir etwas Zeit, um darüber nachzudenken, und versuche, folgende Fragen zu beantworten:

1. Warum liegen alle möglichen Zustände auf einer Strecke?
2. Warum hört die Strecke an den Koordinatenachsen auf und geht nicht weiter?
3. Welcher Punkt auf der Strecke entspricht einer fairen Münze?

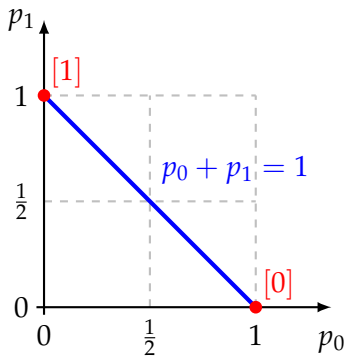


Abbildung 1.2: Die blaue Strecke entspricht den Zuständen eines probabilistischen Bits.

1.1.1 Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten

Wenn du zwei Münzen wirfst, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass beide "Kopf" ergeben? Nimm an, dass die beiden Münzen durch probabilistischen Bits

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

beschrieben werden, wobei das Ergebnis 0 "Kopf" entspricht und das Ergebnis 1 "Zahl". Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Münze die "Kopf"-Seite zeigt, ist also a_0, und die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Münze die "Kopf"-Seite zeigt, ist b_0. (Wir nehmen nicht an, dass die Münzen fair sind, diese Wahrscheinlichkeiten müssen also nicht 50% sein.) Um die Wahrscheinlichkeit, dass beide Münzen *gleichzeitig* "Kopf" zeigen, zu berechnen, müssen wir die beiden Wahrscheinlichkeiten miteinander *multiplizieren*:

$$p_{00} = a_0 b_0. \tag{1.5}$$

Bemerke, dass $p_{00} \leq a_0$ und $p_{00} \leq b_0$ da $a_0 \leq 1$ und $b_0 \leq 1$. Das ist logisch, da "Kopf" für beide Münzen gleichzeitig nicht wahrscheinlicher sein kann als "Kopf" für eine der beiden Münzen alleine (meistens ist es sogar weniger wahrscheinlich). Nach dem gleichen Muster kann man die Wahrscheinlichkeiten aller anderer Kombinationen von Kopf und Zahl berechnen. Hier fassen wir die Fälle zusammen:

$$\begin{aligned} p_{00} &= a_0 b_0, & p_{01} &= a_0 b_1, \\ p_{10} &= a_1 b_0, & p_{11} &= a_1 b_1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Wir nennen zwei Ereignisse unabhängig (engl. *independent*), wenn sie aus verschiedenen Quellen stammen und das Eintreten des einen Ereignisses nichts über das andere aussagt. In solchen Situationen wird typischerweise das Wort "und" benutzt. Zum Beispiel: "Die erste Münze ist Kopf *und* die zweite ist Zahl". Wir multiplizieren Wahrscheinlichkeiten, wenn wir wissen wollen, ob zwei unabhängige Ereignisse gleichzeitig eingetreten sind.

Übungsaufgabe 1.2: Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Alice sitzt gelangweilt im Mathematikunterricht und schaut auf ihre digitale Armbanduhr. Der Sekundenzeiger zeigt Werte von 00 bis 59. Nimm an, dass Alice zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb der nächsten Minute auf ihre Uhr schaut.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sieht sie 00 ?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte Ziffer 0 ?

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer 0?

4. Begründe, wieso die Werte beider Ziffern unabhängig voneinander sind. Überprüfe deine Antwort auf Frage 1, indem du deine Antworten auf Fragen 2 und 3 miteinander multiplizierst.

1.1.2 Wahrscheinlichkeiten addieren

Jetzt schauen wir uns ein etwas komplizierteres Problem an. Nimm wieder an, dass zwei Münzen a und b geworfen werden. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass beide das gleiche Ergebnis zeigen? Es gibt es zwei Möglichkeiten – entweder sind beide Münzen mit der "Kopf"-Seite nach oben gelandet, oder beide zeigen "Zahl". Wir wissen schon von Gl. (1.6), dass die Wahrscheinlichkeiten dieser beiden einzelnen Ereignisse die folgenden sind:

$$p_{00} = a_0 b_0, \qquad p_{11} = a_1 b_1.$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass das eines der beiden Ereignisse eintritt, müssen wir die beiden Wahrscheinlichkeiten *addieren*:

$$p_{00} + p_{11} = a_0 b_0 + a_1 b_1. \tag{1.7}$$

Wir addieren Wahrscheinlichkeiten, wenn wir mehrere Ergebnisse eines Experimentes kombinieren wollen. Solche kombinierten Ereignisse werden typischerweise mit dem Wort "oder" beschrieben. Zum Beispiel: "Beide Münzen zeigen Kopf *oder* beide Münzen zeigen Zahl". Aber aufgepasst: Das funktioniert nur, wenn sich die Münzen nicht gegenseitig beeinflussen!

Übungsaufgabe 1.3: Wahrscheinlichkeiten addieren

Bob sitzt ebenfalls gelangweilt im Mathematikunterricht. Ihm fällt auf, dass Alice auf ihre Uhr starrt – also wirft er auch einen Blick auf seine Uhr. Zu seiner Überraschung zeigt der Sekundenzeiger 44, was Bob unwahrscheinlich erscheint. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ziffern des Sekundenzeigers dieselben sind, wenn Bob zu einem zufälligen Zeitpunkt einer Minute auf seine Uhr schaut?

Nun hast du gelernt, wann Wahrscheinlichkeiten addiert oder multipliziert werden. Probiere doch mit diesem Wissen, deine erste Hausaufgabe zu lösen!

Hausaufgabe 1.1: Gegenteilige Münzen

Alice wirft zwei Münzen a und b mit den folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$a = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen die beiden Münzen auf *unterschiedlichen* Seiten?

1.1.3 Wahrscheinlichkeiten und Berechnungen

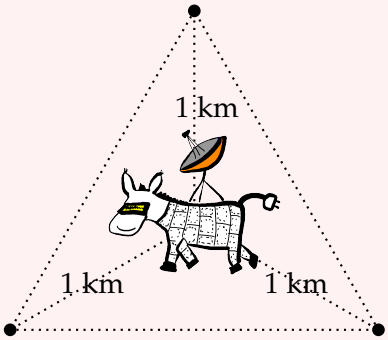
Sind probabilistische Bits für Berechnungen überhaupt von Nutzen? Auf den ersten Blick mag es so aussehen, als seien sie es nicht, da die Werte 0 und 1 eines normalen bits definitives Wissen darstellen, während ein probabilistisches bit ja nur *ungefähres* Wissen (also ein *Mangel* an Wissen) repräsentiert. Warum sollte ich also Speicherplatz auf meinem Computer verschwenden, um probabilistische bits zu speichern, die nur den Mangel an Information widerspiegeln, wenn ich doch einfach die Information speichern könnte, die ich habe, selbst wenn sie unvollständig ist. Der Vorteil von probabilistischen Bits ist, dass sie Teilwissen genauer darstellen können –

wenn du etwas nicht weißt, ist es besser das zuzugeben und zufällig zu raten, als so zu tun, als wüsstest du die Antwort sicher. Im folgenden Problem wird das noch einmal anschaulich dargestellt. Hier muss Alice' Eselsroboter eine Entscheidung treffen muss, ohne alle Informationen zu haben.

Hausaufgabe 1.2: Alice' Esel

Das Problem: Alice will ihren Eselsroboter so programmieren, dass er alleine zu einer Ladestation laufen kann, um sich dort aufzuladen. Es gibt drei Ladestationen in der Nähe. Sie sind alle jeweils 1 km vom Roboter entfernt und bilden ein gleichseitiges Dreieck – mit dem Esel in der Mitte. Der Roboter hat noch genügend Akku, um 2,8 km zu laufen.

Alice wird das Programm, welches den Roboter die Ladestation aussuchen lässt, per WiFi auf ihn hochladen. Sie weiß aber, dass ihre böse Klassenkameradin Eve sie sabotieren will. Da Eve das WiFi überwacht, kann sie den Programmcode mitlesen. Damit Eve nicht sehen kann, wohin der Esel läuft, schaltet Alice das WiFi des Roboters aus, sobald das Programm hochgeladen ist. Solange der Esel dann läuft, kann Eve ihn also nur sabotieren, indem sie Ladestationen hackt und deaktiviert. Sie kann allerdings nur zwei der drei Ladestationen deaktivieren, bevor sie entdeckt wird. Da Eve nicht sehen kann, wohin der Roboter läuft, muss sie sich also nur auf Grund von Alice' Programm entscheiden, welche zwei Ladestationen sie deaktivieren will.

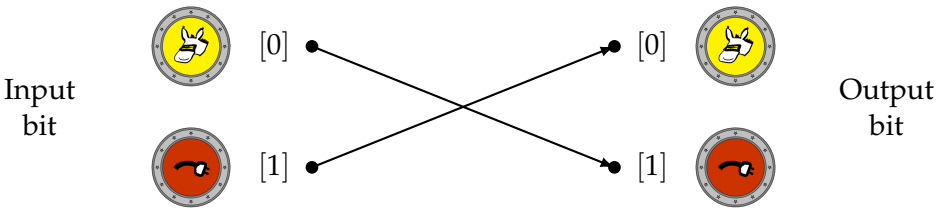


Fragen:

1. Wie viele Ladestationen kann der Esel besuchen, bevor seine Batterie leer ist?
2. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass er die Ladestationen in einer festgelegten Reihenfolge besucht. Kann Eve verhindern, dass der Roboter eine funktionierende Station erreicht? Bedenke, dass Eve Alice' Programmcode mitlesen kann. Sie weiß also, in welcher Reihenfolge der Esel die Stationen ablaufen wird.
3. Nimm an, dass Alice ihren Roboter so programmiert, dass dieser selbst zufällig entscheiden kann, wo er hinwill. (Eve kann zwar sehen, was Alice programmiert hat, kann aber nicht vorhersehen, welche Entscheidungen der Esel trifft, sobald er anfängt loszulaufen.) Was für eine Strategie sollte Alice dem Esel einprogrammieren, und wie sollte Eve auswählen, welche Stationen sie deaktiviert, um dem entgegen zu wirken? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Esel eine funktionierende Ladestation erreichen, falls sowohl Alice als auch Eve bestmögliche Strategien verwenden?

1.2 Operationen auf probabilistischen Bits

Da wir nun wissen, wie man Bits an Information durch Vektoren darstellt, können wir Operationen auf diesen als lineare Transformationen repräsentieren und Hilfsmittel aus der linearen Algebra nutzen. Zum Beispiel können wir uns die Operation anschauen, die "Kopf" und "Zahl" einer Münze vertauscht:



Wir bezeichnen diese Operation als NOT und schreiben mathematisch:

NOT  =  , NOT  =  . (1.8)

Mit den Konventionen aus Gl. (1.2) können wir also schreiben

$$\text{NOT}\,[0] = [1], \qquad \text{NOT}\,[1] = [0]. \tag{1.9}$$

Beachte, wir schreiben NOT p als Abkürzung für NOT(p) – wobei beide Notationen einfach bedeuten, dass NOT auf einen Vektor wirkt. [1] Im Allgemeinen werden wir Operationen mit Großbuchstaben benennen um sie von Vektoren und Zahlen unterscheiden zu können.

Erinnere dich noch einmal an Gl. (1.2), die beschreibt, dass $[0]$ und $[1]$ jeweils die deterministischen Zustände 0 und 1 eines probabilistischen Bits beschreiben. Da die NOT Operation diese zwei Vektoren vertauscht, invertiert oder "negiert" sie den Wert des Bits. Genau aus diesem Grund haben wir sie "NOT" (engl. für "nicht") benannt – sie entspricht der logischen Negation! Eine einfache Anwendung von NOT ist es, Daten in deinen Computer einzugeben. Wenn alle deine Bits zu Beginn auf 0 gesetzt sind, kannst du so einzelne auf 1 setzen, um Daten einzugeben – das ist häufig der erste Schritt einer Berechnung.

Wie sollten wir aber die NOT Operation auf einem probabilistischen Bit $p = \binom{p_0}{p_1}$ definieren? Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit 0 und wird zu einer 1 invertiert. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit 1 und wird zu einer 0 invertiert. Daher kann der Effekt der NOT Operation einfach so beschrieben werden:

$$\text{NOT}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Wenn man in diese Gleichung nun wieder $p_0 = 1$ (und $p_1 = 0$) oder $p_0 = 0$ (und $p_1 = 1$) einsetzt, erhalten wir die uns schon bekannte Gl. (1.9). Du kannst dir also die NOT Operation, und Gl. (1.10) wie folgt vorstellen: Wenn du dir ein probabilistisches Bit als einen 'blinden' Münzwurf vorstellst (du hast dir die Münze also noch nicht angeschaut), dann führst du die NOT Operation aus, indem du die Münze einmal umdrehst, immer noch ohne sie anzuschauen.

Übungsaufgabe 1.4: Die NOT Operation visualisieren

Wie wir in Abb. 1.2 gesehen haben, liegen alle möglichen Zustände eines probabilistischen Bits auf einer Strecke. Lass uns also versuchen zu verstehen, wie die NOT Operation diese Strecke transformiert oder verändert.

1. Such dir einen beliebigen[a] (engl. *arbitrary*) Punkt auf der Strecke mit Koordinaten (p_0, p_1). Wo landet dieser Punkt nachdem du die NOT Operation auf ihn angewandt hast?

2. Was passiert mit den zwei Endpunkten der Strecke?

3. Gibt es einen Punkt auf der Strecke, der auf sich selbst abgebildet wird?

[a] Hier bedeutet 'beliebig', dass deine Berechnungen für *jeden möglichen* Punkt gelten muss. Am einfachsten ist es meist, die Werte p_0 und p_1 bis zum Ende als unbekannte Zahlen zu behandeln.

1.2.1 Erweitern durch Linearität

Wie sollten wir $M\binom{p_0}{p_1}$ definieren, wenn M eine beliebige Operation auf einem Bit ist? Wie zuvor nehmen wir an, dass wir wissen, wie M sich auf die zwei möglichen Werte des Bits auswirkt.

[1] Man könnte auch NOT $\cdot\, p$ schreiben, da diese Operation einer Matrix-Vektor-Multiplikation entspricht.

Dann schreiben wir $M\,[0]$ als das Resultat der Operation, wenn das Bit 0 ist und $M\,[1]$ wenn das Bit 1 ist. (Im Falle der NOT Operation ist das genau das, was wir in Gl. (1.9) gemacht haben.) Nun versuchen wir die gleichen Argumente wie oben zu nutzen: Mit Wahrscheinlichkeit p_0 ist das Bit 0 und wir erhalten $M\,[0]$ durch Anwenden der Operation M. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 ist das Bit 1 und wir erhalten stattdessen $M\,[1]$. Insgesamt sollten wir also definieren

$$M\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\,M\,[0] + p_1\,M\,[1], \tag{1.11}$$

wobei $p_0\,M\,[0]$ bedeutet, dass wir den Vektor $M\,[0]$ mit der Wahrscheinlichkeit p_0 multiplizieren.

Übungsaufgabe 1.5: NOT auf probabilistischen Bits

Zeige, dass Gl. (1.11) zu Gl. (1.10) führt, wenn M die NOT Operation ist.

Durch Gl. (1.3) können wir Gl. (1.11) auch wie folgt umschreiben:

$$M\Big(p_0\,[0] + p_1\,[1]\Big) = p_0\,M\,[0] + p_1\,M\,[1]. \tag{1.12}$$

Beachte, dass der Unterschied der beiden Seiten der Gleichung in der Reihenfolge der Operationen liegt: auf der linken Seite wird erst die Linearkombination gebildet und dann M auf diese angewendet, während auf der rechten Seite zuerst M auf die Zustände wirkt und anschließend die Linearkombination gebildet wird. Diese Gleichung sieht der bekannten Regel $a(b+c) = ab + ac$ sehr ähnlich (das "Distributivgesetz").

Wenn M eine Operation auf probabilistischen Bits ist, die Gl. (1.12) erfüllt, nennen wir M linear. Unsere Regeln aus Gl. (1.11) und (1.12) um M von Bits auf probabilistische Bits zu erweitern, nennt man erweitern durch Linearität. Häufig werden wir das gleiche Konzept für Quantenbits nutzen.

1.2.2 Zufällige Operationen

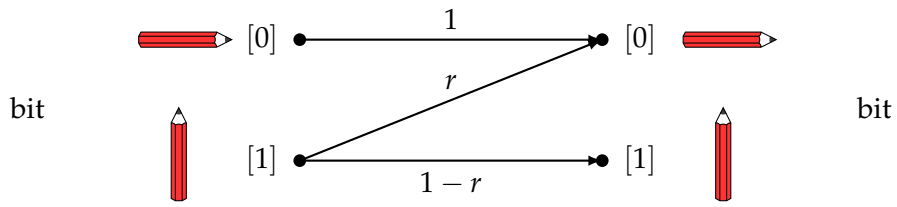
Wie du vielleicht bemerkt hast, haben wir in der Herleitung von Gl. (1.11) nicht angenommen, dass $M\,[0]$ und $M\,[1]$ wieder einer der deterministischen Zustände $[0]$ oder $[1]$ eines Bits waren (obwohl das für die NOT Operation der Fall war). Das bedeutet, dass Gl. (1.11) genauso gut funktioniert, wenn $M\,[0]$ und $M\,[1]$ probabilistische Bits sind! In diesem Fall nennen wir M eine zufällige Operation.

Eine der einfachsten zufälligen Operationen ist die folgende: Stell dir vor, du stellst $[0]$ als einen horizontal liegenden Bleistift dar und $[1]$ indem du den Stift vertikal auf dem Ende balancierst. Wenn du nun mit der Hand sanft auf den Tisch schlägst, fällt der Stift vielleicht um und ändert dabei den Zustand von $[1]$ zu $[0]$. Lag der Stift jedoch bereits vorher, ändert sich der Zustand nicht. Also ist das schlagen des Tisches ein *probabilistisches Zurücksetzen* des Zustands des Stifts zu $[0]$; je stärker du zuschlägst, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit des Zurücksetzens.

Mathematisch beschreiben wir einen probabilistischen Reset (*reset* engl. für "zurücksetzen") als

$$R(r)\,[0] = [0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R(r)\,[1] = r\,[0] + (1-r)\,[1] = \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

wobei $r \in [0,1]$ als die *Reset*-Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird.



Durch Linearität können wir diese Operation auf alle Zustände erweitern:

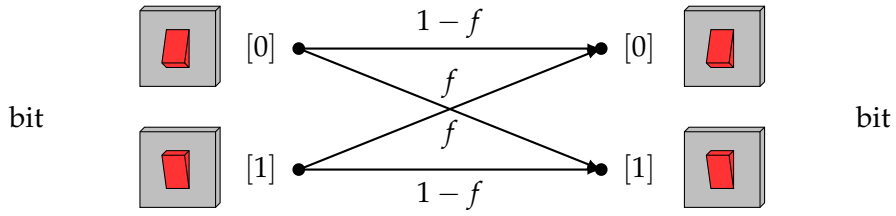
$$\begin{aligned} R(r)\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} &= p_0\, R(r)\,[0] + p_1\, R(r)\,[1] \\ &= p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 r \\ p_1(1-r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachte die beiden Spezialfälle dieser Gleichung $R(0)$, welcher den Zustand nicht verändert und $R(1)$, der jeden Zustand zu $[0]$ zurücksetzt.

Ein anderes interessantes Beispiel einer zufälligen Operation ist der probabilistische Flip $F(f)$, der das Inputbit mit Wahrscheinlichkeit f invertiert oder flippt (engl. für "umdrehen") und mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ nichts ändert:

$$F(f)\,[0] = (1-f)\,[0] + f\,[1], \qquad F(f)\,[1] = f\,[0] + (1-f)\,[1], \tag{1.14}$$

wobei $f \in [0,1]$ die *Flip*-Wahrscheinlichkeit genannt wird. Eine anschauliche Vorstellung eines probabilistischen Flips bietet dir ein Lichtschalter, dessen Zustände $[0]$ und $[1]$ repräsentieren. Wirfst du nun ein Kissen gegen den Lichtschalter, so ändert sich der Zustand – also das Licht geht an oder aus – mit Wahrscheinlichkeit f und mit Wahrscheinlichkeit $1-f$ ändert sich nichts. Du kannst also die Funktion von $F(f)$ wie folgt visualiseren:



Die folgende Übung wird dir helfen, dich mit dem probabilistischen Flip vertraut zu machen.

Übungsaufgabe 1.6: Probabilistischer Flip

Sei $F(f)$ die probabilistische Flip Operation aus Gl. (1.14).

1. Schreibe $F(f)\,[0]$ und $F(f)\,[1]$ als Vektoren.
2. Für welchen Wert von f entspricht $F(f)$ der NOT Operation? Wie können wir mit F ein probabilistisches Bit aus dem $[0]$ Zustand in einen beliebigen Zustand $\left(\begin{smallmatrix} p \\ 1-p \end{smallmatrix}\right)$ versetzen?
3. Erweitere $F(f)$ durch Linearität auf probabilistische Bits indem du $F(f)\left(\begin{smallmatrix} p_0 \\ p_1 \end{smallmatrix}\right)$ berechnest.
4. Sei $\left(\begin{smallmatrix} p_0 \\ p_1 \end{smallmatrix}\right)$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeige, dass $F(1/2)\left(\begin{smallmatrix} p_0 \\ p_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt.

Die letzte Aufgabe der Übungsaufgabe zeigt, dass $F(1/2)$ immer zur Gleichverteilung (engl. *uniform distribution*) führt, egal wie die eingehende Verteilung aussieht. Das ist nützlich, wenn man einen fairen Münzwurf simulieren will. Tatsächlich wirst du in der nächsten Hausaufgabe zeigen, dass man durch verändern der Flip-Wahrscheinlichkeit die Fairness der Münze *ändern* kann.

Hausaufgabe 1.3: Schokoladenmünzen

Es ist der 15. Mai und Bob feiert Geburtstag! Da er Schokolade liebt, hat Alice sich entschlossen, ihm eine Schokoladenmünze zu machen. Damit die Münze ganz besonders ist, hat sie die Münze so geformt, dass sie genau mit der Wahrscheinlichkeit $q = 5/15$, die seinem Geburtstag entspricht, auf  landet, wenn man sie zuvor kreiseln lässt. Nach langem ausprobieren hat sie endlich genau die richtige Form gefunden. Aufgeregt lässt sie die Münze auf dem Tisch liegen, um eine Geburtstagskarte zu kaufen.

Als sie zurückkommt, muss sie leider feststellen, dass die Münze in der Sonne lag und eine Kante ein wenig angeschmolzen ist. Durch ausprobieren stellt sie fest, dass die neue Wahrscheinlichkeit von  jetzt $p = 4/15$ ist. Leider hat sie keine Zeit mehr um eine neue Münze zu machen, also schreibt sie in die Geburtstagskarte, dass Bob die Münze nach dem Kreiseln mit Wahrscheinlichkeit f einfach umdrehen soll, damit  genau mit Wahrscheinlichkeit q eintritt. Hilf Alice herauszufinden, welchen Wert f haben sollte.

Hinweis: Die Werte p, q und f sollten folgende Gleichung erfüllen: $F(f)\binom{p}{1-p} = \binom{q}{1-q}$.

Übungsaufgabe 1.7: Flip durch Reset und NOT

Wie kannst du $F(f)$ aus den $R(r)$ und NOT Operationen bauen?

1.3 Ein probabilistisches Bit messen

Wenn du eine Münze wirfst, sie aber sofort mit deiner Hand abdeckst, kannst du nicht wissen, auf welcher Seite sie gelandet ist. In dieser Situation lässt sich der Zustand der Münze durch die Gleichverteilung (engl. *uniform distribution*) beschreiben:

$$\text{  } = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]. \tag{1.15}$$

Wenn du dann aber deine Hand hebst und die Münze "Kopf" zeigt, wird dein Wissen über den Zustand aktualisiert zu

$$\text{  } = [0] \tag{1.16}$$

da du ja jetzt sicher weißt, in welchem Zustand sich die Münze befindet. Wir bezeichnen den Prozess des Aufdeckens, bzw. die Hand in so einem Münzwurf zu heben, als messen (engl. *measurement*) [2].

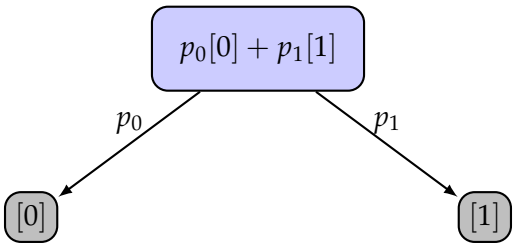
Bemerke, dass der Zustand nach dem Messen ein anderer ist als davor, siehe Gl. (1.15) und (1.16). Tatsächlich ist nach dem Messen der Zustand nicht mehr unklar. Stell dir jetzt vor, du bedeckst die Münze wieder mit deiner Hand, nachdem du ihren Zustand gerade gemessen hast. In welchem Zustand ist sie jetzt? Offensichtlich noch immer

$$\text{  } = [0] \tag{1.17}$$

da wir ja bereits wissen, dass sie "Kopf" zeigt. Auch wenn du sie jetzt noch eimal misst (anschaust), wird sie wieder "Kopf" zeigen. Genauso verläuft das ganze, wenn du bei der ersten Messung einer zufälligen Münze "Zahl" als Ergebnis hattest: egal wie oft du die Messung wiederholst, das Ergebnis wird "Zahl" bleiben.

[2] Diesen Begriff haben wir aus der Welt der Quanteninformatik übernommen, wo ein ähnlicher Prozess existiert.

Im Allgemeinen resultiert das Messen eines zufälligen Bits mit der Verteilung $\binom{p_0}{p_1}$ mit Wahrscheinlichkeit p_0 im Ergebnis 0 (“Kopf”) und mit Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis 1 (“Zahl”):



(1.18)

Der Zustand des probabilistischen Bits ist nach dem Messen dann nicht mehr $\binom{p_0}{p_1}$ sondern einer der beiden Basiszustände $[0] = \binom{1}{0}$ oder $[1] = \binom{0}{1}$, in Abhängigkeit des Messergebnisses. Wenn du beispielsweise das Ergebnis 1 (“Zahl”) erhältst, ist der Zustand danach $[1]$. Im Allgemeinen *verändert* messen den Zustand!

Es ist wichtig zu bemerken, dass sich durch das Messen eines probabilistischen Bits nicht die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten p_0 oder p_1 extrahieren lassen – du bekommst nur einen einzelnen Bit 0 oder 1 als Ergebnis. Außerdem ist die ursprüngliche Verteilung $\binom{p_0}{p_1}$ nach dem Messen zerstört, man kann die Messung also nicht auf der ursprünglichen Verteilung wiederholen. Das ist tatsächlich sehr intuitiv: Wenn man eine Münze genau einmal wirft erhält man nur ein einzelnes zufälliges Ergebnis – man weiß aber nicht ob die Münze fair oder unfair ist.

Wenn wir aber die gleiche Münze sehr häufig werfen, erwarten wir, dass der Anteil der Würfe mit Ergebnis 1 in etwa p_1 ist. Mit anderen Worten,

$$\frac{N_1}{N} \approx p_1, \tag{1.19}$$

wobei N die Anzahl aller Messungen und N_1 die Anzahl der Messungen mit Ergebnis 1 ist. Je mehr Messungen wir durchführen, desto genauer sollte p_1 angenähert werden [3].

Hausaufgabe 1.4: Münzen werfen

1. Nimm dir eine Münze und markiere die Seiten mit 0 und 1. Wirf die Münze 30 mal und dokumentiere die Ergebnisse in einer Tabelle der folgenden Form:

Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	1	…	1

   (Die grauen Ergebnisse sind nur Beispiele, ersetze sie mit deinen Ergebnissen.)

2. Schätze mit Gl. (1.19) die Wahrscheinlichkeit, mit der deine Münze auf der mit 1 markierten Seite landet.

3. Es ist interessant zu sehen, wie sich diese Schätzung verändert, je höher die Zahl der Würfe N steigt. Um das anschaulich zu machen, erweitere deine Tabelle aus Aufgabe 1 um drei weitere Zeilen, sodass sie wie folgt aussieht:

Anzahl der Würfe N	1	2	3	4	5	6	7	8	…	30
N-tes Ergebnis	1	0	1	0	0	0	1	1	…	1
Summe N_1	1	1	2	2	2	2	3	4	…	16
Anteil N_1/N	1	1/2	2/3	2/4	2/5	2/6	3/7	4/8	…	16/30
Wert des Bruchs	1.00	0.50	0.67	0.50	0.40	0.33	0.43	0.50	…	0.53

[3] Wie gut ist diese Annäherung? Man kann zeigen, dass der Fehler im Durchschnitt etwa Größenordnung $1/\sqrt{N}$ hat, also schnell auf 0 zugeht, wenn wir häufig messen.

Die Zeilen haben dann folgende Bedeutung: (1) Anzahl N der Würfe bisher, (2) Ergebnis des N-ten Wurfs, (3) Summe der ersten N Würfe, (4) Schätzung der Wahrscheinlichkeit für Ergebnis 1 basiert auf den ersten N Messungen, (5) Dezimaldarstellung der Schätzung. Wenn du möchtest, kannst du *Excel* oder ein ähnliches Programm nutzen

4. Zeichne einen Graphen der letzte Zeile der Tabelle als eine Funktion der Anzahl der Würfe N.

1.4 Der QUIRKY Simulator

Die Gesetze der Wahrscheinlichkeit können ein wenig schwer zu verstehen sein. Zum Glück können wir versuchen, deren Verhalten mithilfe von Computern zuhause (oder dem in deiner Tasche) [4] zu simulieren.

In diesem Kurs verwenden wir einen Simulator, der QUIRKY heißt. QUIRKY ist das kleine Geschwisterchen von Quirk, einem Simulator mit mehr Funktionen, der von Craig Gidney bei Google entwickelt wurde. Da Craig seinen Quellcode mit einer *open-source*-Lizenz veröffentlicht hat, konnten wir den Simulator auf die Bedürfnisse dieses Kurses anpassen. Das Beste an QUIRKY ist, dass er direkt in deinem Browser funktioniert – du musst ihn nicht installieren! Besuche einfach:

https://www.quantum-quest.org/quirky

und klicke auf "Quest 1". Probier es ruhig kurz aus – du kannst QUIRKY auch auf deinem Handy benutzen! Wenn du QUIRKY das erste Mal öffnest, sollte es in etwa wie in Abb. 1.3 aussehen.

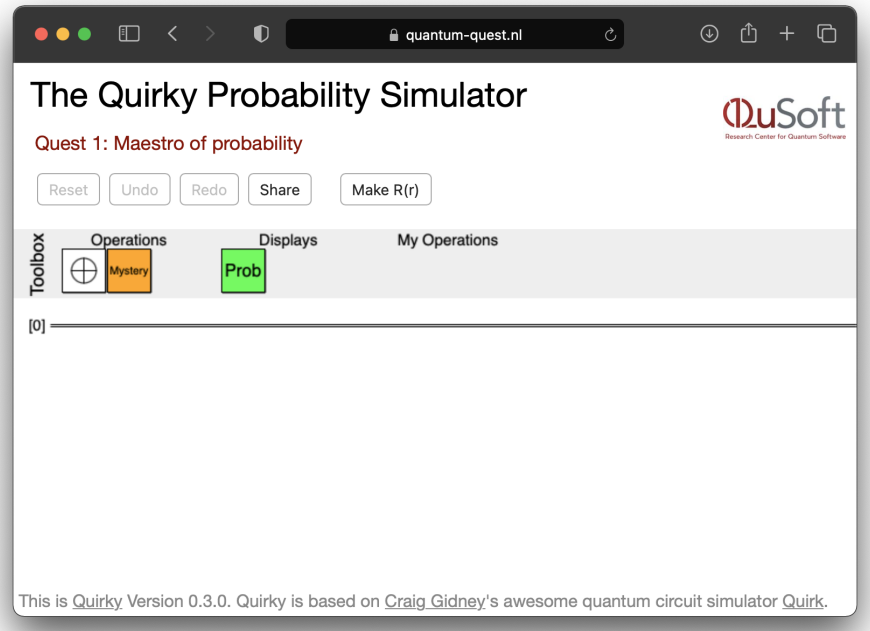


Abbildung 1.3:
Erster Blick auf QUIRKY.

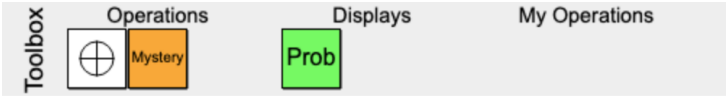
[4] Bis zu einem gewissen Maß gilt das auch für Quantencomputer – aber da greifen wir voraus...

1.4.1 Erste Schritte

Lass uns die Benutzeroberfläche von QUIRKY Schritt für Schritt anschauen. Oben findest du eine *Menüzeile* mit nützlichen Befehlen:

Die 'Reset'-Taste lässt dich QUIRKY zurücksetzen und von vorne beginnen. Die 'Undo'- und 'Redo'-Tasten machen Änderungen rückgängig oder stellen sie wieder her (*undo* engl. für "rückgängig machen", *redo* engl. für "wiederherstellen"). Beachte, dass du auch einen 'Reset' rückgängig machen kannst. Durch einen Klick auf 'Share' kannst du dein Programm mit anderen teilen. Über die 'Make $R(r)$'-Taste sprechen wir später.

Unter dem Menü gibt es die *Toolbox* mit den grundlegenden Operationen die wir schon kennen:



Die erste Box, ⊕, entspricht der NOT Operation aus §1.2, die den Zustand invertiert. Die anderen zwei Operationen betrachten wir gleich. Zum Glück musst du dir das nicht alles merken – wenn du mit der Maus über die Boxen fährst (oder sie auf deinem Handy antippst) siehst du ihre Beschreibung.

Unter der Toolbox siehst du das Herz von QUIRKY, das *probabilistische Bit*:

Die Doppellinie (oder auch 'Draht') entspricht einem Bit, das mit dem Zustand $[0]$ initialisiert ist. Du kannst Operationen auf das Bit anwenden, indem du sie aus der Toolbox auf den Draht ziehst. Versuche mal, die folgende simple Berechnung in QUIRKY umzusetzen: [5]

Wie können wir nun das Ergebnis dieser Berechnung anzeigen? Da wir im Allgemeinen mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten, suchen wir einen Weg, *Wahrscheinlichkeiten anzuzeigen*. Mit der grünen Box mit dem Namen Prob aus dem 'Display'-Bereich der Toolbox können wir genau das tun. Füg sie doch einfach mal zu der Berechnung hinzu und schau was passiert:

Es sieht so aus, als würde man bei einer Messung mit Wahrscheinlichkeit 100% das Ergebnis 1 erhalten (wenn du mit der Maus über die Box fährst, siehst du welcher Zustand oben und unten ist). Das entspricht natürlich unserer Erwartung. Der ursprüngliche $[0]$ Zustand wird durch die NOT Operation zu einem $[1]$ Zustand geflippt. Nach den Mess-Regeln aus Gl. (1.18) wird das Ergebnis also immer 1 sein.

[5] Falls du die digitale Version dieser Vorlesungsnotizen liest, kannst du einfach auf die Bilder klicken, um QUIRKY im Browser zu öffnen. Dann wird der ganze Schaltkreis automatisch kopiert! Falls das nicht funktioniert, öffne https://www.quantum-quest.org/quirky einfach selbst.

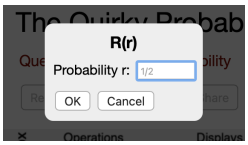
Übungsaufgabe 1.8: Eine Operation entfernen

In QUIRKY kannst du Operationen auch wieder entfernen, indem du sie einfach vom Draht herunter zurück in die Toolbox ziehst. Entferne doch einfach mal die NOT Operation und überprüfe ob das Messergebnis jetzt immer 0 ist.

1.4.2 Eigene Operationen erstellen

Bisher hast du nur gelernt, die $[0]$ und $[1]$ Zustände mit QUIRKY zu erstellen. Um interessante Verteilungen zu erstellen, kannst du die Reset-Operation $R(r)$ aus §1.2.2 benutzen. Da es unendlich viele dieser Operationen gibt (eine für jedes mögliche r), können nicht alle in der Toolbox angezeigt werden. Stattdessen kannst du sie selbst in die Toolbox hinzufügen!

Lass uns das mal üben. Füge eine Operation hinzu, die mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{1}{2} = 50\%$ einen Reset durchführt. Zuerst klickst du auf die 'Make $R(r)$'-Taste im Menü. Ein Popup-Fenster öffnet sich, in dem du r eingeben kannst:



Gib `1/2` ein und bestätige mit der 'Ok'-Taste. Glückwunsch! Du hast erfolgreich die $R(1/2)$-Operation zur Toolbox hinzugefügt, die jetzt so aussieht:

Um deine neue Operation zu testen, kannst du folgende Veränderung in QUIRKY machen:

Lass uns kurz überprüfen, dass das neue Ergebnis sinnvoll ist: Das Bit startet im $[0] = \binom{1}{0}$-Zustand. Durch die NOT-Operation wird das Bit in den $[1] = \binom{0}{1}$-Zustand geflippt. Nach Gl. (1.13) setzt die Operation $R(1/2)$ Bits im Zustand $[1]$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ zurück, ändert den Zustand also zu:

$$R(1/2)\,[1] = \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1] = \binom{1/2}{1/2} = \binom{50\%}{50\%}.$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis, das wir auch in QUIRKY gesehen haben.

In der folgenden Hausaufgabe wirst du QUIRKY nutzen um ein komplizierteres Experiment durchzuführen.

Hausaufgabe 1.5: Zweimal Resetten

1. Baue die folgende Sequenz von Operationen in QUIRKY: Generiere zuerst den Zustand $[1]$, resette dann mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{1}{4}$ und resette anschließend mit Wahrscheinlichkeit $r = \frac{2}{3}$. Nutze das Tool zum Anzeigen von Wahrscheinlichkeiten um die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse herauszufinden.

2. Zeige, dass die Antwort aus QUIRKY korrekt ist.

1.4.3 Eine mysteriöse Operation

Bisher haben wir immer noch nicht über die mysteriöse orangene Box gesprochen. Lass uns diese Operation doch M nennen. Wie können wir herausfinden, was die Operation M macht? Als erstes können wir versuchen herausfinden, was das Ergebnis von $M\,[0]$ ist, also was passiert, wenn man M auf ein Bit im Zustand $[0]$ anwendet. In QUIRKY entspricht das folgender Berechnung:

Wie können wir jetzt $M\,[0]$ ablesen? Wir müssen uns an dieser Stelle kurz daran erinnern, dass man bei zufälligen Bits in der Natur *nicht* einfach die Wahrscheinlichkeiten ablesen kann. Stattdessen muss man, wie in §1.3 beschrieben, viele Messungen durchführen (z.B. viele Münzwürfe durchführen) und die Wahrscheinlichkeiten vom Ergebnis abschätzen. Der Vorteil von einem Simulator wie QUIRKY ist, dass diese Regeln für uns nicht gelten – wir können mit der Wahrscheinlichkeitsanzeige den Zustand einfach anzeigen lassen:

Also wissen wir jetzt

$$M\,[0] = 0.2\,[0] + 0.8\,[1].$$

Jetzt bist du an der Reihe!

Hausaufgabe 1.6: Zeit für ein Mysterium

1. Bestimme den Zustand $M\,[1]$
2. Bestimmen $M\,[0]$ und $M\,[1]$ die zufällige Operation M vollständig?
   Falls ja, schreibe eine Formel für $M\left(\begin{smallmatrix}1/2\\1/2\end{smallmatrix}\right)$ auf und überprüfe sie mit QUIRKY. Falls nicht, erkläre wieso.

In den kommenden Wochen werden wir den Sprung von gewöhnlichen Bits zu Quantenbits wagen und lernen, wie man mit diesen auf immer raffinierte Weise rechnet. QUIRKY wird uns dabei als zuverlässiges Werkzeug dienen und im Laufe der Zeit mit immer mehr neuen Funktionen ausgestattet werden. Benutze es gerne, um die Theorie, die du lernen wirst zu verstehen und um dir bei den Hausaufgaben zu helfen.

1.5 Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung Übungsaufgabe 1.1

1. Da immer eines der Ereignisse eintritt, muss die Summer der Wahrscheinlichkeiten notwendigerweise sich auf 1 addieren. Das bedeutet, dass $p_0 + p_1 = 1$ gilt. Durch umformen erhält man $p_1 = 1 - p_0$, was einer Geradengleichung mit Steigung -1 entspricht.
2. Wenn die Strecke über die Koordinatenachsen hinaus gehen würde, müsste eine der Wahrscheinlichkeiten negativ werden. Da Wahrscheinlichkeiten aber nicht negativ sein können, müssen die Bedingungen $p_0 \geq 0$ und $p_1 \geq 0$ gelten, also die Strecke an den Koordinatenachsen enden.
3. Das ist der Mittelpunkt, an dem $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ gilt.

Lösung Übungsaufgabe 1.2

1. Der Sekundenzeiger kann 60 verschiedene Werte anzeigen. Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten zu sehen ist $\frac{1}{60}$.
2. Die letzte Ziffer kann 10 verschiedene Werte haben. Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten zu sehen ist $frac110$.
3. Die erste Ziffer kann 6 verschiedene Werte haben. Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten zu sehen ist $\frac{1}{6}$.
4. Wenn du nur die erste Ziffer siehst, kann die letzte Ziffer immer noch alle 10 möglichen Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit einnehmen. Das gleiche gilt, wenn du nur die letzte Ziffer siehst, dann kann die erste immer noch alle 6 möglichen Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit einnehmen. Also sind die Werte der zwei Ziffern unabhängig. Du kannst die Wahrscheinlichkeit mit folgender Gleichung verifizieren:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}.$$

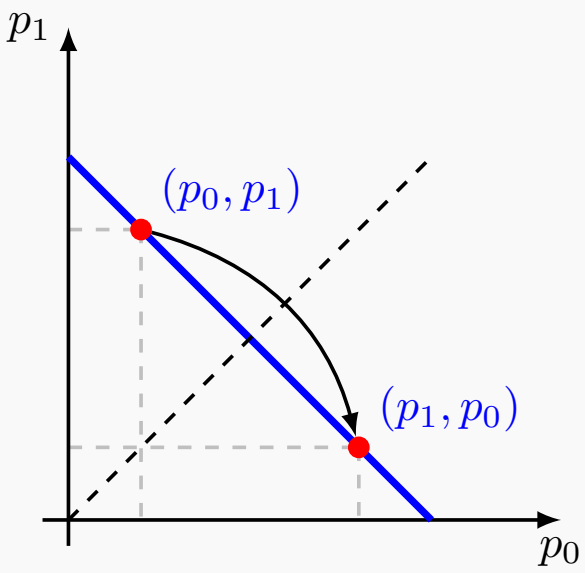
Lösung Übungsaufgabe 1.3

Es gibt sechs verschiedene Fälle, in denen beide Ziffern gleich sind (von 00 bis 55). Jeder einzelne Fall tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{60}$ ein. Wir können diese sechs Ereignisse in eines zusammenfassen, sodass dessen Wahrscheinlichkeit die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist:

$$\underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60}}_{\text{6 Terme}} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Lösung Übungsaufgabe 1.4

1. In Gl. (1.10) haben wir gesehen, dass der Punkt (p_0, p_1) durch die NOT-Operation auf den Punkt (p_1, p_0) abgebildet wird. Mit anderen Worten, die Koordinaten des Punktes werden getauscht. Hier ist ein Beispiel, wie das grafisch aussieht:



   Du kannst dir die NOT-Operation also grafisch als "Spiegeln an der gestrichelten Diagonale" vorstellen.

2. Nach Gl. (1.2) korrespondieren die zwei Endpunkte der Achse mit den zwei deterministischen Zuständen $[0]$ und $[1]$. In Gl. (1.9) haben wir gesehen, dass die NOT-Operation die beiden miteinander vertauscht.

3. Ein Punkt mit den Koordinaten (p_0, p_1) bleibt unverändert von der NOT-Operation, wenn $(p_0, p_1) = (p_1, p_0)$ also $p_0 = p_1$. Da $p_0 + p_1 = 1$ gelten muss, gilt das für $p_0 = p_1 = 1/2$, was dem Punkt $(1/2, 1/2)$ entspricht. Dies ist der einzige Punkt der unverändert bleibt.

Lösung Übungsaufgabe 1.5

Wir nutzen Gl. (1.9) und (1.11),

$$\text{NOT}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = p_0\,\text{NOT}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1\,\text{NOT}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

was dasselbe ist wie Gl. (1.10).

Lösung Übungsaufgabe 1.6

1. Aus der Definition von $F(f)$ in Gl. (1.14),

$$F(f)\,[0] = (1-f)\,\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + f\,\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1-f\\f\end{smallmatrix}\right),$$
$$F(f)\,[1] = f\,\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + (1-f)\,\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}f\\1-f\end{smallmatrix}\right).$$

2. $F(f)$ flippt das Bit mit Sicherheit wenn $f = 1$, also ist NOT $= F(1)$. Um $[0]$ zu einem beliebigem Zustand $\left(\begin{smallmatrix}p\\1-p\end{smallmatrix}\right)$ zu verändern, müssen wir $f = 1-p$ wählen. Tatsächlich sieht man aus der ersten Gleichung oben, dass

$$F(1-p)\,[0] = \begin{pmatrix}1-(1-p)\\1-p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\1-p\end{pmatrix}.$$

3. Nach Gl. (1.11),

$$F(f)\,\begin{pmatrix}p_0\\p_1\end{pmatrix} = p_0\begin{pmatrix}1-f\\f\end{pmatrix} + p_1\begin{pmatrix}f\\1-f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_0(1-f)+p_1 f\\p_0 f + p_1(1-f)\end{pmatrix}.$$

4. Wenn man $f = 1/2$ in die vorige Gleichung einsetzt, erhält man

$$F(1/2)\,\begin{pmatrix}p_0\\p_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_0/2+p_1/2\\p_0/2+p_1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}p_0+p_1\\p_0+p_1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Lösung Übungsaufgabe 1.7

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $\frac{1}{2} \le f \le 1$: In diesem Fall gilt $0 \le \frac{1-f}{f} \le 1$. Wir behaupten, dass die Flip-Operation $F(f)$ gebaut werden kann, indem zuerst $R(\frac{1-f}{f})$, dann NOT und dann $R(1-f)$ angewendet wird. Tatsächlich gilt:

$$R(1-f)\,\mathrm{NOT}\,R(\tfrac{1-f}{f})\,[0] = R(1-f)\,\mathrm{NOT}\,[0] = R(1-f)\,[1] = (1-f)\,[0] + f\,[1]$$

und

$$\begin{aligned} R(1-f)\,\mathrm{NOT}\,R(\tfrac{1-f}{f})\,[1] &= R(1-f)\,\mathrm{NOT}\left(\tfrac{1-f}{f}\,[0] + (1-\tfrac{1-f}{f})\,[1]\right)\\ &= R(1-f)\left((1-\tfrac{1-f}{f})\,[0] + \tfrac{1-f}{f}\,[1]\right)\\ &= (1-\tfrac{1-f}{f})\,[0] + \tfrac{1-f}{f}\left((1-f)\,[0] + f\,[1]\right)\\ &= f\,[0] + (1-f)\,[1]. \end{aligned}$$

- $0 \le f \le \frac{1}{2}$: Dieser Fall kann auf den ersten reduziert werden, da $F(f)$ anzuwenden das gleiche ist wie zunächst $F(1-f)$ und anschließend NOT.

Quest 2: Das Qubit bezwingen

Da du nun Wahrscheinlichkeiten und probabilistische Bits beherrschst, bist du bereit, etwas über Quantenbits zu lernen. Quantenbits sind den probabilistischen Bits sehr ähnlich, tatsächlich musst du nur Wahrscheinlichkeiten durch Quanten-Amplituden ersetzen. Deine dieswöchige Quest wird dir alles wichtige über die Zustände eines Qubit, erlaubte Operationen auf einem Qubit und das Messen eines Qubits beibringen. Außerdem wirst du die neue *Quanten*-variante von QUIRKY ausprobieren können.

2.1 Quantenbits

Bits sind die Einheit für Information in modernen Computern. Um ein Bit zu bauen, braucht man ein physisches Objekt, dass sich in einem von zwei zuverlässig unterscheidbaren Zuständen befindet, wie zum Beispiel eine Münze mit zwei Seiten oder ein Kondensator, der elektrische Ladung bei zwei verschiedenen Spannungsniveaus speichert. [6] Das Verhalten dieser Objekte (und auch der entsprechenden Bits) kann durch physikalische Theorien wie Mechanik (für Münzen) oder Elektromagnetismus (für Kondensatoren) beschrieben werden.

Für sehr kleine[7] Objekte gelten diese Gesetze nicht mehr und wir müssen eine grundlegendere Theorie namens Quantenmechanik nutzen. Ein Elektron hat zum Beispiel eine Eigenschaft, die 'Spin' (von engl. für "Drehung" oder "Drall") genannt wird, welche (wie eine Münze) zwei Werte – hoch oder runter – annehmen, und damit zum speichern von Bits genutzt werden kann. Aber anders als eine Münze, kann der Spin eines Elektrons auch in einer sogenannten "Superposition" beider Zustände sein! In gewisser Hinsicht ähnelt das einem probabilistischen Bit, das in einem Zwischenzustand zwischen 0 und 1 sein kann.

Es gibt aber einen feinen Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und "Superpositionen" (siehe §2.6.1 über Interferenz). Wie wir sehen werden, führen die Gesetze der Quantenmechanik zu einem viel grundlegenderen Begriff von Information als einem Bit – einem Quantenbit oder Qubit.

Wir werden Qubits mit einem simplen mathematischen Modell definieren, ohne uns Gedanken über Interpretation deren seltsamen Verhaltens zu machen und stattdessen die Frage stellen: "Wofür können wir das nutzen?". Genauso wenig werden wir uns darüber Gedanken machen, wie man Qubits physisch bauen kann, bzw. aus welchen physischen Objekten sie bestehen. Falls dich das aber interessiert, in §2.6.2 reden wir kurz darüber, wieso polarisiertes Licht genutzt werden kann, um Qubits zu bauen.

2.1.1 Wahrscheinlichkeiten versus Amplituden

Quantenbits sind probabilistischen Bits sehr ähnlich, es gibt nur zwei große Unterschiede:

1. Wahrscheinlichkeiten werden durch Amplituden ersetzt (welche auch negativ sein können),

2. Amplituden werden während dem Messen quadriert (Wahrscheinlichkeiten dagegen nicht).

Auf diese Unterschiede werden wir in Kürze mit mehr Detail eingehen, aber zunächst schauen wir uns einmal die möglichen Zustände eines Qubits an. Erinnerst du dich, wie wir die zwei Seiten einer Münze genutzt haben, um zwei deterministische Zustände eines

[6] So werden Bits auch auf deinem Computer, Handy usw. gespeichert.

[7] Mit "sehr klein" meinen wir hier *wirklich sehr sehr klein*! Die Anzahl der Elektronen, die man nebeneinander legen müsste um eine Linie der Länge 1 cm zu bilden ist vergleichbar mit der Anzahl an Papierblättern, die man stapeln müsste um den Mond zu erreichen!

probabilistischen Bits zu beschreiben (siehe Abb. 1.1)? In der Quanteninformatik werden diese zwei Zustände meistens $|0\rangle$ und $|1\rangle$ genannt, um sie von den klassischen Bits $[0]$ und $[1]$ zu unterscheiden. Genau wie bei probabilistischen Bits kann der Zustand eines Qubits $|\psi\rangle$ als Linearkombination, oder auch Superposition, dieser zwei deterministischen Zustände geschrieben werden:

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle . \tag{2.1}$$

Hier ist der griechische Buchstabe ψ (ausgesprochen: "psi") der Name des Zustands (genau wie wir das probabilistischen Bit p genannt haben). Die Klammern $|\cdot\rangle$ bilden dabei eine sogenannte "ket"-form (vom engl. *bracket* für "Klammer"), die zeigt, dass wir mit einem Quantenzustand rechnen. Zum Vergleich kannst du dir in Gl. (1.3) noch einmal ansehen, dass ein beliebiges probabilistisches Bit p wie folgt geschrieben werden kann:

$$p = p_0[0] + p_1[1]. \tag{2.2}$$

Beachte, dass Gl. (2.1) identisch aussieht, außer, dass die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 durch die Amplituden ψ_0 und ψ_1, sowie die klassische Notation $[0]$ und $[1]$ durch die Quanten Notation $|0\rangle$ und $|1\rangle$ ersetzt wurden! Es gibt allerdings einen wichtigen Unterschied: Während für die Wahrscheinlichkeiten aus Gl. (2.2) folgendes gilt,

$$p_0, p_1 \geq 0 \qquad\qquad p_0 + p_1 = 1, \tag{2.3}$$

gilt für die Amplituden

$$\psi_0^2 + \psi_1^2 = 1. \tag{2.4}$$

Daraus folgt insbesondere $\psi_0^2 \leq 1$ und $\psi_1^2 \leq 1$ und damit $\psi_0, \psi_1 \in [-1, 1]$. Im Gegensatz dazu folgt aus den Bedingungen für Wahrscheinlichkeiten in Gl. (2.3), dass $p_0, p_1 \in [0, 1]$. Der entscheidende Unterschied ist dabei, dass Amplituden negativ sein dürfen, Wahrscheinlichkeiten dagegen nicht!

Genau wie bei probabilistischen Bits, ist es sinnvoll Zustände als Vektoren darzustellen. Analog zu Gl. (1.2) stellen wir die deterministischen Qubit Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ durch die zwei Basisvektoren dar:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist ein allgemeiner Quantenzustand $|\psi\rangle$ aus Gl. (2.1) dargestellt als

$$|\psi\rangle = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Ein Qubit als ein Kreis

Bemerke, dass Gl. (2.4) für Quantenamplituden ähnlich der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ des Einheitskreises ist. Lass uns versuchen, diese Korrelation genauer zu analysieren, sie wird uns nämlich helfen, Qubits zu visualisieren und sie auf einer intuitiven Ebene zu verstehen.

Es ist sinnvoll, ein Qubit zu parametriseren indem wir

$$\psi_0 = \cos\theta, \qquad \psi_1 = \sin\theta$$

setzen, wobei $\theta \in [0, 2\pi)$ ein Winkel ist. Tatsächlich erlauben wir jede reale Zahl für θ (solange wir daran denken, dass zwei Winkel identisch sind, wenn sie die Distanz 2π haben). Da $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ gilt, ist Gl. (2.4) automatisch erfüllt. Bei dieser Wahl für ψ_0 und ψ_1 sieht ein allgemeiner Qubit Zustand so aus:

$$|\psi(\theta)\rangle = \cos\theta |0\rangle + \sin\theta |1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

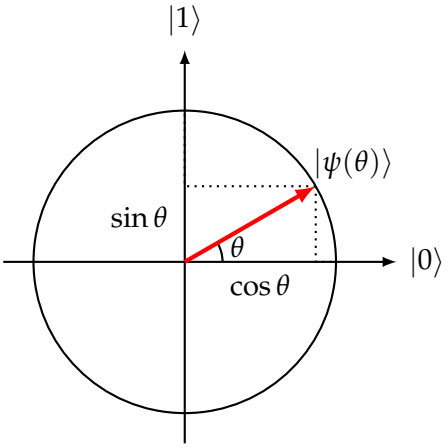


Abbildung 2.1: Der Qubit Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ als Punkt auf dem Einheitskreis.

Diesen Zustand können wir uns als zweidimensionalen Vektor vorstellen, der am Ursprung beginnt und Winkel θ zur horizontalen Achse $|0\rangle$ hat (siehe Abb. 2.1). Insbesondere gilt $|0\rangle = |\psi(0)\rangle$ und $|1\rangle = |\psi(\frac{\pi}{2})\rangle$. Damit ergibt die Menge aller Qubit Zustände den Einheitskreis, mit Zentrum im Ursprung. Im Vergleich dazu hatten wir in Abb. 1.2 dargestellt, dass die Zustände eines probabilistischen Bits einer Strecke zwischen $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ auf den Koordinatenachsen entsprechen. Beide Mengen sind in Abb. 2.2 abgebildet.

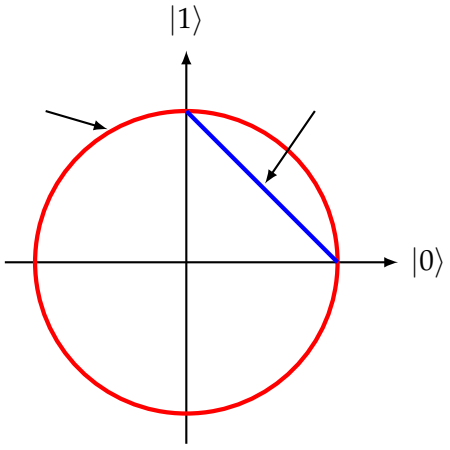


Abbildung 2.2: Der Zustandsraum eines probabilistischen Bits (blau) sowie eines Qubits (rot).

Übungsaufgabe 2.1: Zustände auf dem Kreis

Betrachte folgende zwei Zustände eines Qubits:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Wo liegen diese Zustände auf dem Einheitskreis? Welchem Winkel θ entsprechen sie jeweils?

2.2 Ein Qubit messen

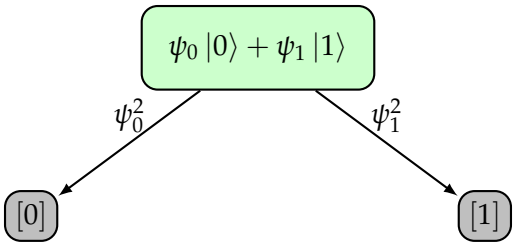
Wir wissen nun, dass jeder Zustand eines Qubits die Form $|\psi(\theta)\rangle$ hat. Sagen wir, du bekommst den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ in die Hände und würdest gerne herausfinden, welchen Wert θ hat. Leider

lässt dich die Quantenmechanik nicht an diesen Wert heran! Das scheint ein riesengroßes Problem zu sein – was bringt ein Quantencomputer, wenn man nicht an die Antwort kommt? Nun, nicht so schnell! Erinnere dich an Gl. (1.18), das Gleiche gilt auch für probabilistische Bits – wenn du ein probabilistisches Bit mit Verteilung $\binom{p_0}{p_1}$ misst, findest du den Wert von p_0 oder p_1 nicht heraus. Du bekommst nur ein einzelnes Bit an Information: 0 mit Wahrscheinlichkeit p_0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit p_1.

Die Quantenmessung ist da sehr ähnlich und wird durch die sogenannte *Born Regel*[8] beschrieben. Wenn du einen Qubit im Zustand $\binom{\psi_0}{\psi_1} = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ misst, erhältst du auch nur ein einzelnes Bit an Information: 0 oder 1 mit Wahrscheinlichkeiten

$$p_0 = \psi_0^2, \qquad p_1 = \psi_1^2. \tag{2.6}$$

Das Quadrieren mag überraschend wirken, aber bedenke, dass $p_0 + p_1 = \psi_0^2 + \psi_1^2 = 1$ gilt. Also ist das quadrieren notwendig, damit $\binom{p_0}{p_1}$ eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, also ergibt die Regel Sinn! Nach dem Messen ist der Zustand verschwunden und du hast nur noch ein einzelnes Bit mit Information über das Ergebnis der Messung. Mit anderen Worten, das Messen wandelt ein Qubit in ein klassisches Bit um, dessen Wert zufällig durch Gl. (2.6) bestimmt wird:



(2.7)

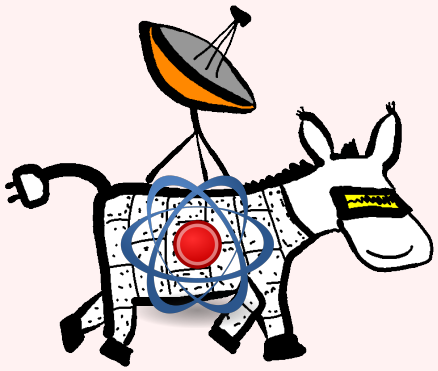
Wie du in Gl. (1.18) und (2.7) siehst, sind die Regeln für das Messen von probabilistischen Bits und Qubits sehr ähnlich. In beiden Fällen geht der ursprüngliche Zustand durch das Messen verloren und man erhält nur ein einzelnes Bit, dessen Wert zufällig vom ursprünglichen Zustand abhängt. (Insbesondere erhält man immer das gleiche Ergebnis, wenn man einen Zustand mehrmals hintereinander misst – mehrfach messen liefert also keine neuen Informationen.) Der einzige Unterschied ist, dass man für Qubits die Amplituden quadrieren muss, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erhalten, wie in Gl. (2.6), während man die Wahrscheinlichkeiten von probabilistischen Bits direkt erhält. Das scheint zwar ein kleiner Unterschied zu sein, dieser hat jedoch bedeutende Auswirkungen auf die möglichen Zustände, diese können jetzt auch negativ sein, während probabilistische Bits immer Positiv sind (siehe Abb. 2.2).

Es gibt einen noch feineren Unterschied. Es kann nämlich niemand das Ergebnis einer Quantenmessung vorhersehen. Der Unterschied ist fein, denn das gleiche scheint auch für probabilistische Bits zu gelten. Worin liegt der Unterschied? Kurz gesagt, probabilistische Bits scheinen zufällig, weil wir nicht wissen, in welchem Zustand sie sind (bzw. welche Verteilung sie haben), während Qubits selbst dann zufällig sind, wenn wir alles über ihren Zustand wissen, was es zu wissen gibt. Stell dir zum Beispiel vor, du wirfst eine faire Münze und verdeckst sie sofort danach mit deiner Hand. Den Zustand würdest du normalerweise als Gleichverteilt beschreiben (siehe Gl. (1.15)). Wenn du die Münze beim Flug aber mit einer Hochgeschwindigkeitskamera filmst, könntest du wahrscheinlich relativ gut vorhersagen, auf welcher Seite sie gelandet ist, basierend auf den Filmaufnahmen. Die Gesetze der Mechanik erlauben dir dabei, basierend auf der Rotation, Geschwindigkeit und Position der Münze vorherzusagen, wie sie landet. In diesem Sinne basiert der Zufall eines probabilistischen Bits auf unserem Unwissen. Bei Qubits dagegen ist der Zufall fundamentaler Bestandteil. Egal was wir im Vorhinein an Informationen über das Qubit gesammelt haben, es ist im Allgemeinen *unmöglich* das

[8] Benannt nach Max Born, einem deutschen Physiker

Ergebnis einer Quantenmessung perfekt vorherzusagen. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass Quantenmessungen eine gute Quelle für Zufall sind!

Hausaufgabe 2.1: Ein zufälligen Bit auf Quantenbasis erzeugen



Das Problem: Der Akku von Alice' Eselsroboter ist schon wieder fast leer und muss den Weg zu einer Ladestation finden. Blöderweise hat Eve es geschafft, den Zufallszahlengenerator des Esels zu hacken. Aber da Eve damit auf einem Hackerforum angegeben hat, weiß auch Alice davon. Um deren bösen Plan aufzuhalten, hat Alice einen Mini-Quantencomputer mit einem Qubit im Roboter verbaut. Sie will die fundamentale Unvorhersehbarkeit einer Quantenmessung nutzen, um Zufallsbits zu generieren, die Eve nicht vorhersehen kann.

Fragen: Alice kann das Qubit in jeden Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ versetzen und will ein zufälliges Bit generieren, indem sie das Qubit misst.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie das Ergebnis 0 beim messen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ergebnis 1?

2. Alice will den Winkel θ so einstellen, dass beide Wahrscheinlichkeiten $1/2$ sind. Welchen Winkel θ sollte sie wählen? (Es könnte mehrere Lösungen geben!)

2.3 Qubits mit QUIRKY simulieren

Die Gesetze der Quanteninformatik sind seltsam und die meisten von uns haben keinen Quantencomputer, auf dem man herumexperimentieren könnte. Glücklicherweise hat QUIRKY seit letzter Woche neue Funktionen bekommen und kann nun ein *Quanten*-Bit simulieren! [9] Besuche zunächst wieder:

https://www.quantum-quest.org/quirky

und tippe auf "Quest 2". Dein Fenster wird ähnlich wie in Abb. 2.3 aussehen.

Der wichtigste Unterschied zu letzter Woche ist, dass der 'Draht' nun einem *Qubit* entspricht, welches in Zustand $|0\rangle$ startet.

Genau wie letzte Woche enthält die *Toolbox* wieder Operationen, die du auf den Draht ziehen kannst:

Die erste Operation,  , lässt uns Qubits messen. Lass uns doch direkt mal den ersten einfachen Schaltkreis in QUIRKY bauen:

[9] Warum brauchen wir überhaupt Quantencomputer, wenn wir sie doch mit normalen simulieren können? Nun, Simulatoren wie QUIRKY funktionieren gut, solange wir nur auf einer Handvoll Qubits rechnen, sobald wir aber mehr brauchen funktionieren sie nicht mehr. Warum das so ist, werden wir in Quest 4 (**??**, **??**) herausfinden.

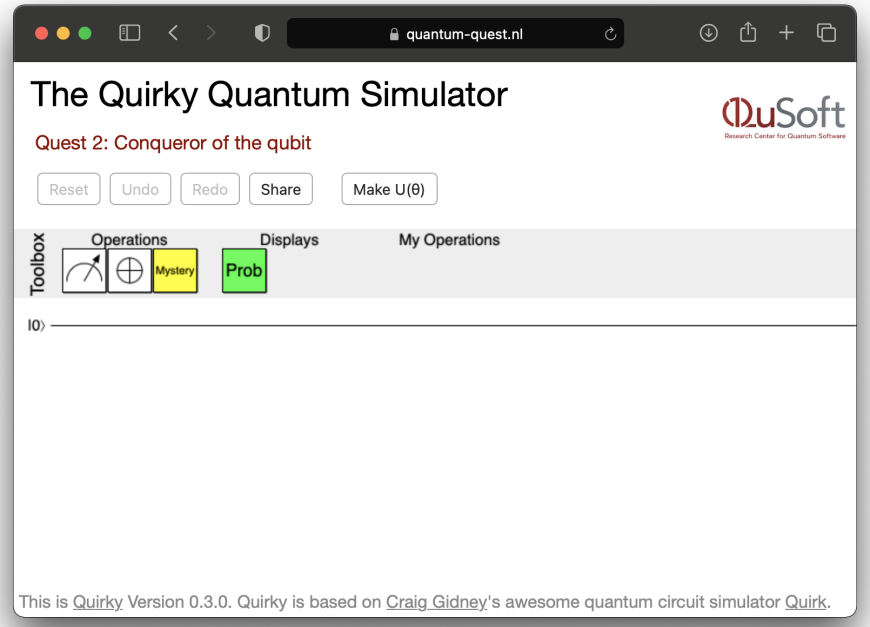


Abbildung 2.3:

Du wirst merken, dass sich die Linie nach dem Messen in eine Doppellinie verwandelt. Das liegt daran, dass in QUIRKY einzelne Linien Qubits entsprechen und Doppellinien eben 'klassischen' Bits. Tatsächlich wissen wir aus §2.2, dass das Messen eines Qubits zu einem Ergebnis von entweder 0 oder 1 mit gewissen Wahrscheinlichkeiten führt, also einem probabilistischen Bit.

Um die Wahrscheinlichkeiten der beiden Möglichkeiten darzustellen, können wir wieder die Wahrscheinlichkeitenanzeige Prob benutzen, die wir letzte Woche kennengelernt haben. Füg sie doch einfach mal hinzu:

Es sieht so aus, als wäre das Ergebnis der Messung mit 100% 'Null' (indem du mit der Maus über die Box fährst, siehst du mehr Details). Das entspricht natürlich genau unseren Erwartungen. Wenn wir $|0\rangle$ messen, sollte das Ergebnis laut den Regeln aus Gl. (1.18) immer 'Null' sein.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir noch die übrigen Operationen aus der Toolbox besprechen.

2.4 Operationen auf einem Qubit

Ein Qubit im Ursprungszustand zu messen ist relativ langweilig, wir wissen ja in welchem Zustand es sich befindet. Aber was für Operationen können wir auf ein Qubit anwenden um den Zustand zu verändern? Wir wollen also aus dem Zustand $|0\rangle$ durch eine Operation den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ erzeugen. Wie auch immer die Operation aussieht, sie sollte auf jeden Fall wieder in einem gültigen Zustand resultieren, also den Zustandsraum auf sich selbst abbilden. In Abb. 2.1 hatten wir gesehen, dass der Zustandsraum eines Qubits dem Einheitskreis entspricht, also müssen wir Operationen finden, die diesen Kreis auf sich selbst abbilden.

Lass uns zu Beginn einmal die NOT-Operation anschauen, die wir wie in Gl. (1.9) für probabilistische Bits definieren können:

$$\text{NOT}\,|0\rangle = |1\rangle\,, \qquad \text{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle\,.$$

Wie können wir NOT auf beliebige Qubit Zustände erweitern? Genau wie für probabilistische Bits in §1.2.1 nutzen wir das Konzept der Linearität. Wenn die Operation M auf $|0\rangle$ und $|1\rangle$ definiert ist, können wir sie auf einem beliebigen Zustand definieren als

$$M\Big(\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle\Big) = \psi_0\,M\,|0\rangle + \psi_1\,M\,|1\rangle\,. \tag{2.8}$$

Wir können Gl. (2.8) auch in der Vektornotation ausschreiben:

$$M\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = M\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\,M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\,M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Wie wir schon bemerkt hatten, wird eine Operation, die diese Eigenschaft erfüllt, linear genannt und eine Operation auf diese Weise zu erweitern nennt man erweitern durch Linearität. Wenn wir also wissen, das M linear ist und wie M sich auf $|0\rangle$ und $|1\rangle$ auswirkt, können wir herleiten wie sich M auf beliebige Zustände auswirkt!

In Gl. (2.8) haben wir nur die Vektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ betrachtet. Im Allgemeinen gilt sogar

$$M\Big(a\,|\psi\rangle + b\,|\phi\rangle\Big) = a\,M\,|\psi\rangle + b\,M\,|\phi\rangle \tag{2.10}$$

für beliebige Vektoren $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ und Zahlen a, b. Verstehst du, wie Gl. (2.10) aus Gl. (2.8) folgt?

Die Gesetze der Quantenmechanik garantieren, dass jede lineare Operation M eine Qubit Operation ist – solange sie den Qubit Zustandsraum auf sich selbst abbildet! Das soll heißen, dass jeder Zustand eines Qubits (Punkt auf dem Kreis) auf einen anderen Zustand (Punkt auf dem Kreis) abgebildet wird.

Im Falle der NOT-Operation erhält man nach erweitern durch Linearität

$$\mathrm{NOT}\Big(\psi_0\,|0\rangle + \psi_1\,|1\rangle\Big) = \psi_0\,|1\rangle + \psi_1\,|0\rangle\,, \quad \text{oder} \quad \mathrm{NOT}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Bemerke, dass Gl. (2.8), (2.9) und (2.11) genau wie Gl. (1.10) und (1.12) aussehen – nur das ψ_0 und ψ_1 jetzt auch negativ sein können. Auf Abb. 2.2 bezogen, stellt die NOT-Operation eine *Spiegelung* an der 45-Grad-Achse dar (das gilt auch für probabilistische Bits). In Abb. 2.4 ist die Operation grafisch dargestellt. Offensichtlich bildet die NOT-Operation den Zustandsraum (Einheitskreis) auf sich selbst ab, ist also eine gültige Quanten-Operation.

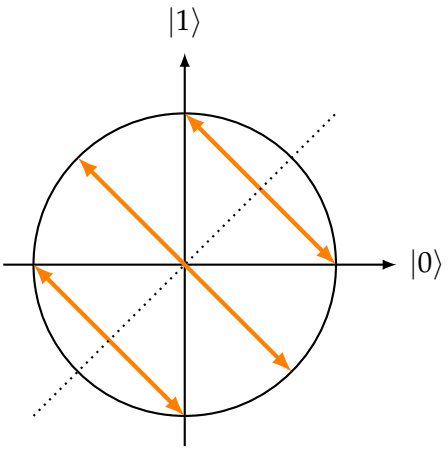


Abbildung 2.4: Die *NOT*-Operation auf Qubits, definiert in Gl. (2.11), entspricht einer Spiegelung an der 45 Grad (oder $\pi/4$) Achse (gestrichelt).

In QUIRKY sieht die NOT-Operation auf Qubits genau wie die klassische Version aus, also so: $\boxed{\oplus}$. Probier mal, die folgende Schaltung zu bauen:

Jetzt scheint das Messergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% *'Eins'* zu sein. Tatsächlich wird also der ursprüngliche $|0\rangle$ Zustand durch die NOT-Operation zu $|1\rangle$ verändert, sodass das Ergebnis nach den Regeln der Messung aus Gl. (1.18) immer 'Eins' sein muss.

Wir können auch andere Qubit-Operationen definieren, indem wir Spiegelungen an anderen Achsen betrachten. Beispielsweise entspricht die Z-Operation, definiert durch

$$Z|0\rangle = |0\rangle\,, \qquad Z|1\rangle = -|1\rangle\,, \tag{2.12}$$

einer Spiegelung an der horizontalen $|0\rangle$-Achse. Wenn wir Z durch Linearität erweitern, erhalten wir tatsächlich

$$Z\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_0\\ -\psi_1\end{pmatrix},$$

was offensichtlich Qubit-Zustände auf Qubit-Zustände abbildet.

Hausaufgabe 2.2: Die Z-Operation

Betrachte folgende zwei Qubit Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

1. Berechne $Z|+\rangle$ und $Z|-\rangle$.
2. Stelle die Z-Operation grafisch auf dem Einheitskreis dar, wie in Abb. 2.4.

Übungsaufgabe 2.2: Linearität genügt nicht

Betrachte die MAD-Operation, indem du $\text{MAD}|0\rangle = |0\rangle$ und $\text{MAD}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ durch Linearität erweiterst. Suche einen Qubit Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\text{MAD}|\psi\rangle$ kein gültiger Qubit-Zustand ist. Zeige also, dass MAD keine gültige Operation auf Qubits ist!

2.4.1 Rotationen

Bisher wissen wir nur, wie man die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit QUIRKY baut. Quanteninformatik wäre aber nicht besonders interessant, wenn das unsere einzigen Optionen wären! Um spannendere Zustände zu generieren, müssen wir uns andere Operationen ausdenken.

Eine naheliegende Operation ist, den Kreis um einen festgelegten Winkel zu *drehen* (rotieren). Lass uns die *Rotation* um den Winkel θ einfach $U(\theta)$ nennen. Du kannst immer annehmen, dass der Winkel in $[0, 2\pi)$ liegt. Da $|0\rangle = |\psi(0)\rangle$ und $|1\rangle = |\psi(\frac{\pi}{2})\rangle$ gilt, wirkt die Operation wie folgt auf die Basisvektoren (siehe Abb. 2.5):

$$U(\theta)|0\rangle = |\psi(\theta)\rangle\,, \qquad U(\theta)|1\rangle = |\psi(\theta + \tfrac{\pi}{2})\rangle\,. \tag{2.13}$$

Wir können diese Definition also in Vektornotation so schreiben:

$$U(\theta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad U(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ und $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$.

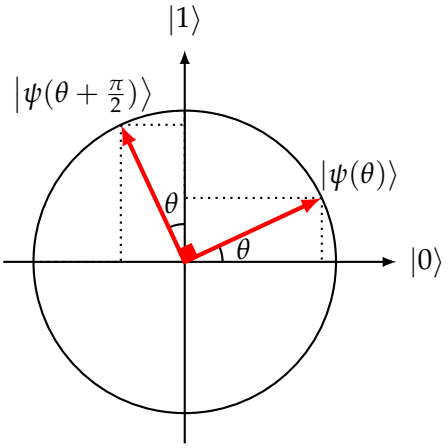


Abbildung 2.5: Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ um den Winkel θ gedreht, siehe Gl. (2.13).

Genau wie zuvor auch, können wir die Linearität ausnutzen, um $U(\theta)$ auf allgemeine Qubit-Zustände zu erweitern. In der folgenden Übung wirst du zeigen, dass die daraus folgende Operation $U(\theta)$ tatsächlich einer Rotation von Qubit-Zuständen entspricht. Konkret bedeutet das, dass $U(\theta)$ den Zustandsraum auf sich selbst abbildet, also eine gültige Operation ist.

Übungsaufgabe 2.3: Qubit-Rotationen

1. Berechne $U(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}$ mit Gl. (2.8) und (2.13).

2. Nutze die Definition von $|\psi(\theta)\rangle$ aus Gl. (2.5) um zu prüfen, dass für alle Winkel α und β folgendes gilt:
$$U(\alpha)\,|\psi(\beta)\rangle = |\psi(\alpha+\beta)\rangle\,. \tag{2.15}$$
Das bedeutet, dass $U(\theta)$ eine Rotation auf beliebigen Qubit-Zuständen entspricht.

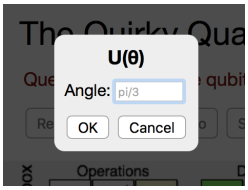
Hinweis: Die trigonometrischen Regeln für Winkelsummen und -differenzen könnten hilfreich sein:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{2.16}$$

Beachte dass eine Rotation um 90 Grad (also $\pi/2$) nicht einer Spiegelung entspricht. Zwar bilden sowohl die NOT-Operation als auch $U(\pi/2)$ den Zustand $|0\rangle$ auf $|1\rangle$ ab, aber auf $|1\rangle$ haben sie unterschiedliche Wirkungen:

$$\text{NOT}\,|1\rangle = |0\rangle\,, \qquad U(\pi/2)\,|1\rangle = -\,|0\rangle\,.$$

Wie können wir eine solche Rotation in QUIRKY ausführen? Da es unendlich viele Rotationen $U(\theta)$ gibt, können nicht alle in der Toolbox enthalten sein. Stattdessen kannst du die Rotationen, die du benötigst, selbst in die Toolbox hinzufügen! Probier doch einfach mal, eine Rotation um 30° hinzuzufügen. Tippe zunächst auf 'Make $U(\theta)$' im Menü. Ein neues Fenster mit einem Eingabefeld für den Winkel sollte sich öffnen:



Gib `pi/6`, was 30° entspricht, ein und bestätige mit der OK-Taste. Glückwunsch! Du hast erfolgreich die $U(\pi/6)$-Rotation in die Toolbox hinzugefügt, welche jetzt so aussieht:

Die neue Rotation können wir mit folgendem Schaltkreis erst einmal in QUIRKY testen:

Lass uns noch schnell überprüfen, ob diese Ausgabe Sinn ergibt. Wir haben mit dem $|0\rangle = \binom{1}{0}$ Zustand gestartet. Nach Gl. (2.14) bildet $U(\theta)$ den Zustand $|0\rangle$ auf $|\psi(\theta)\rangle = \binom{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ab. Für unseren Fall gilt $\theta = \pi/6$ und damit

$$|\psi(\pi/6)\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\pi/6)\\ \sin(\pi/6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

Nach den Regeln der Quantenmessung aus Gl. (2.7) können wir schließen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 1 wie folgt ist

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 25\%,$$

was genau der Ausgabe von QUIRKY entspricht. In der folgenden Hausaufgabe wirst du QUIRKY nutzen um den Effekt von $U(\theta)$ auf den anderen Basisvektor $|1\rangle$ herauszufinden.

Hausaufgabe 2.3: Die 30°-Rotation testen

1. Baue folgende Abfolge von Operationen in QUIRKY: Bereite zunächst den Zustand $|1\rangle$ vor, rotiere dann um den Winkel $\pi/6$ und messe schlussendlich das Qubit.
2. Nutze QUIRKY's Wahrscheinlichkeitenanzeige um die Ergebnisse der Messung anzuzeigen. Zeige, dass die Ausgabe von QUIRKY korrekt ist.
3. Verändere deinen Schaltkreis so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis 'Null' 42% entspricht.

2.4.2 Zusammensetzen von Quanten-Operationen

Um eine neue Quanten-Operation zu erhalten, können wir zwei vorhandene Operationen M und N einfach zusammensetzen. Angenommen, der ursprüngliche Zustand ist $|\psi\rangle$, dann erhält man durch Anwenden von M einfach $M(|\psi\rangle) = M|\psi\rangle$. Danach N anzuwenden resultiert dann im Zustand $N(M|\psi\rangle)$. Wir benennen diese zusammengesetzte (engl. *composite*) Operation NM, sodass

$$NM|\psi\rangle = N(M|\psi\rangle).$$

Achte darauf, dass du nicht die Reihenfolge der Operationen vertauscht. Wenn die zusammengesetzte Operation NM ist, wird zunächst M und danach N angewandt! Das liegt daran, dass M direkt neben dem $|\psi\rangle$ steht, sich also zuerst auf den Zustand auswirken muss.

Übungsaufgabe 2.4: Linearität einer zusammengesetzten Operation (optional)

Zeige dass NM auch linear ist.

Hinweis: Nutze Gl. (2.10).

Genauso können wir auch drei oder mehr Qubit-Operationen zusammensetzen. Dann schreiben wir ONM und so weiter. Zum Beispiel kann man neue Operationen durch das Zusammensetzen von Rotationen und Spiegelungen bilden, darüber sprechen wir später in §2.4.3.

Eine interessante Bemerkung ist, dass alle bisherigen Qubit-Operationen invertierbar sind. Das bedeutet, dass für jede Operation M eine andere Operation, die wir M^{-1} nennen, sodass zuerst M und danach M^{-1} anwenden, oder umgekehrt, den Zustand nicht verändert. [10] In Formeln können wir schreiben

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I, \tag{2.17}$$

wobei I der Identität entspricht, die die "triviale" Eigenschaft

$$I|0\rangle = |0\rangle, \qquad I|1\rangle = |1\rangle \tag{2.18}$$

erfüllt. (Wir hätten I auch als $U(0)$ definieren können, der Rotation um $0°$.) Also gilt $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$ für die durch Linearität erweiterte Operation.

Als Beispiel können wir uns das Inverse der Operation U anschauen. Geometrisch ergibt es Sinn, dass erst um β und anschließend um $-\beta$ rotieren den Zustand unverändert lässt. Um das formal zu zeigen, müssen wir nur zweimal Gl. (2.15) anwenden:

$$U(-\beta)U(\beta)|\psi(\alpha)\rangle = U(-\beta)|\psi(\alpha+\beta)\rangle = |\psi(\alpha+\beta-\beta)\rangle = |\psi(\alpha)\rangle$$

und genauso wenn wir zuerst um $-\beta$ und anschließend um β rotieren. Das bedeutet, dass die inverse Operation von $U(\beta)$ einfach $U(-\beta)$ ist:

$$U(\beta)^{-1} = U(-\beta).$$

Da die NOT-Operation einer Spiegelung entspricht, ist es klar, dass ein Zustand nach zweimaligen anwenden unverändert ist. Aus Gl. (1.9) folgt tatsächlich

$$\text{NOT}\,\text{NOT}|0\rangle = \text{NOT}|1\rangle = |0\rangle \quad \text{und} \quad \text{NOT}\,\text{NOT}|1\rangle = \text{NOT}|0\rangle = |1\rangle.$$

Aus Linearität folgt, dass $\text{NOT}\,\text{NOT}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ für jeden Zustand $|\psi\rangle$ gilt, also ist NOT nicht nur invertierbar, sondern sogar *selbstinvers*, also $\text{NOT}^{-1} = \text{NOT}$.

Übungsaufgabe 2.5: Das Inverse einer zusammengesetzten Operation

Zeige dass NM invertierbar ist, wenn M und N invertierbar sind. Beschreibe das Inverse der zusammengesetzten Operation $(NM)^{-1}$ durch die einzelnen Inverse N^{-1} und M^{-1}.

Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede Operation, die den Zustandsraum eines Qubits auf sich selbst abbildet notwendigerweise invertierbar ist. Das ist der Fall für Rotationen $U(\theta)$, wie wir schon gesehen haben, und wird auch für Spiegelungen $V(\theta)$ gelten, wie du gleich sehen wirst. Bei probabilistischen Bits hatten wir dagegen gesehen, dass beispielsweise der zufällige Flip $F(1/2)$ jeden Zustand auf die Gleichverteilung $\binom{1/2}{1/2}$ abgebildet hat (siehe Übungsaufgabe 1.6) und damit nicht invertierbar ist.

2.4.3 Spiegelungen

Jede Qubit-Operation ist entweder eine Rotation oder eine Spiegelung (Reflektion). Mit Rotationen aus Gl. (2.13) haben wir uns schon ein wenig auseinandergesetzt. Spiegelungen dagegen kennen wir erst zwei: Z und NOT, siehe Gl. (2.11) und (2.12). Aber wie sieht die allgemeinste Spiegelung aus?

Man kann beispielsweise jede Spiegelung bilden, indem man eine bestimmte (sagen wir, die NOT-Spiegelung) betrachtet, und sie mit einer passenden Rotation kombiniert, sodass die Spiegelachse sich korrekt ändert. In der folgenden Übung wirst du zeigen, wie man die Z-Spiegelung aus der NOT-Spiegelung auf zwei Wege erhalten kann.

Hausaufgabe 2.4: Z aus NOT

Seien Z, NOT und $U(\theta)$ die Qubit-Operationen definiert in Gl. (2.11) bis (2.13).

1. Finde einen Winkel θ, für den $Z = U(\theta)\,\mathrm{NOT}\,U(-\theta)$ gilt.
2. Finde einen Winkel θ, für den $Z = \mathrm{NOT}\,U(\theta)$ gilt.

Kannst du die Abfolge der Transformationen auf dem Einheitskreis visualisieren?

Hinweis: Schau dir Abb. 2.4 und die Zeichnung, die du für die Hausaufgabe 2.2 erstellt hast an.

Es stellt sich heraus, dass man *jede* Spiegelung auf eine ähnliche Art und Weise bauen kann. Die allgemeinste Spiegelung hat die Form

$$V(\theta) = \mathrm{NOT}\,U(\theta) = U(-\theta)\,\mathrm{NOT}. \tag{2.19}$$

Eine sehr nützliche Operation ist zum Beispiel die Hadamard (nach Jacques Hadamard) Transformation, die sich wie folgt auf die Basiszustände auswirkt (siehe Abb. 2.6):

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle\,, \qquad H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle\,. \tag{2.20}$$

Diese Operation ist ein Spezialfall der allgemeinen Spiegelung:

$$H = V(\pi/4). \tag{2.21}$$

Zusammengefasst ist jede Qubit-Operation entweder eine Rotation $U(\theta)$ oder eine Spiegelung $V(\theta)$, wobei θ ein Winkel ist.

2.5 Quantenzustände unterscheiden

Alice schaut einen Wettbewerb mit Eselsrobotern und schreibt auf, ob ihr Lieblingsroboter gewinnt: eine 1 falls er gewinnt, ansonsten eine 0. Diese Information könnte sie auch in einem Qubit kodieren: sie versetzt das Qubit in den Zustand $|\psi(\theta_0)\rangle$, falls der Roboter verliert und in Zustand $|\psi(\theta_1)\rangle$ falls er gewinnt. Das erreicht sie, indem sie entweder $U(\theta_0)$ oder $U(\theta_1)$ auf einen Qubit im Zustand $|0\rangle$ anwendet, wie in Gl. (2.13). Jetzt nehmen wir an, Alice gibt das Qubit an Bob weiter. Kann Bob nur anhand des Qubits raten, welchen Bitwert (0 oder 1) Alice in dem Qubit kodiert hat? Wäre es besser, wenn Bob zuerst eine Rotation oder Spiegelung ausführen könnte? In der folgenden Übungsaufgabe kannst du diese Prinzipien einmal ausprobieren.

[10] Diese Notation und Gl. (2.17) erinnert dich vielleicht an folgendes: Ist x eine Zahl größer 0, dann ist $x^{-1} = \frac{1}{x}$ deren Inverses, also gilt $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

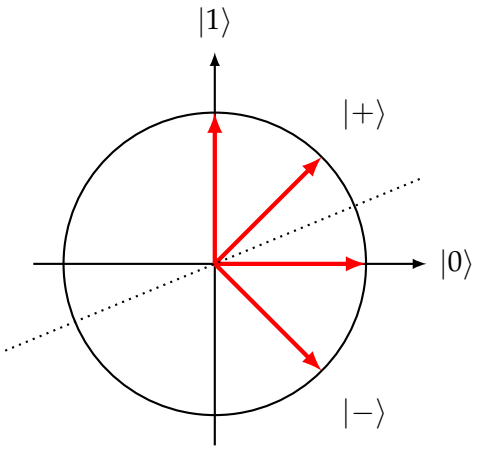


Abbildung 2.6: Die Hadamard-Operation H auf einem Qubit entspricht einer Spiegelung an der 45/2 Grad (oder $\pi/8$) Achse (gestrichelt). Außerdem sind die Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$, und $|-\rangle$ aus Gl. (2.20) dargestellt.

Übungsaufgabe 2.6: Plus und Minus

Stell dir vor, jemand gibt dir ein Qubit in einem der folgenden Zustände:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Du willst erraten, in welchem der beiden Zustände es sich befindet. Du darfst eine Rotation anwenden und danach messen. Um welchen Winkel solltest du rotieren und mit welcher Wahrscheinlichkeit rätst du korrekt?

Wenn du verschiedene Bitwerte durch verschiedene Quantenzustände darstellen willst, musst du aufpassen, dass du nicht $|\psi(\theta)\rangle$ und $|\psi(\theta+\pi)\rangle$ nutzt, da diese nicht unterschieden werden können.

Übungsaufgabe 2.7: Ununterscheidbare Zustände

Zeige, dass die beiden Zustände $|\psi(\theta)\rangle$ und $|\psi(\theta+\pi)\rangle = -|\psi(\theta)\rangle$ nicht unterschieden werden können. Also, dass egal welche Qubit-Operationen du anwendest, bevor du misst, die Messergebnisse immer gleich wahrscheinlich sein werden.

Es ist recht aufschlussreich, die beiden Übungenaufgabe 2.6 und 2.7 zu vergleichen. Wenn sich zwei Zustände durch ein allgemeines Minuszeichen unterscheiden, sind sie ununterscheidbar, wie in Übungsaufgabe 2.7. Die beiden Vektoren $\pm|\psi(\theta)\rangle$ beschreiben, praktisch gesehen, den *selben* Zustand. Im Gegensatz dazu sind 'relative' Minuszeichen wichtig und können sogar zu perfekt unterscheidbaren Zuständen führen!

In der folgenden Hausaufgabe kannst du herausfinden, wie man zwei *beliebige* Quantenzustände optimal unterscheidet.

Hausaufgabe 2.5: Zwei Zustände unterscheiden

Seien θ, θ' zwei Winkel. Nimm der Einfachheit halber an, dass $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$. Angenommen, Eve gibt dir ein einzelnes Qubit, welches sich jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ oder $|\psi(\theta')\rangle$ befindet. (Sie könnte beispielsweise eine faire Münze werfen, um zu entscheiden, in welchem Zustand sich das Qubit befinden soll.) Deine Aufgabe ist es nun, herauszufinden, welchen Zustand das Qubit hat. In ein paar Schritten wirst du die

optimale Strategie finden:

1. Wende zunächst die Rotation $U(\phi)$ um einen Winkel ϕ an. Welche zwei möglichen Zustände erhältst du dann?

2. Führe als nächstes eine Quantenmessung durch und interpretiere das Ergebnis wie folgt: Falls das Ergebnis 0 ist, rätst du, dass das Qubit in Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ war, ansonsten rätst du den Zustand $|\psi(\theta')\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit identifizierst du den Zustand korrekt? Schreibe eine Formel mit den Variablen θ, θ' und ϕ.

   Hinweis: Berechne zunächst die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den ersten Zustand bekommen. Dann die Erfolgswahrscheinlichkeit, angenommen du hast den zweiten Zustand bekommen. Und dann erinnere dich daran, dass beide mit Wahrscheinlichkeit 50% auftreten.

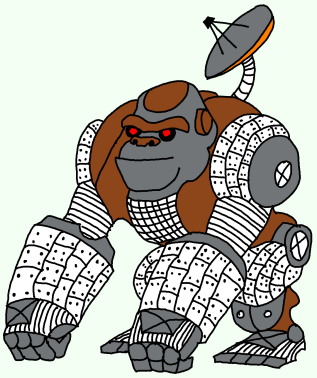
3. Du kannst den Rotationswinkel ϕ immer noch clever wählen. Was ist die Erfolgswahrscheinlichkeit als Funktion von θ und θ', wenn du ϕ optimal wählst?

   Hinweis: Versuche die trigonometrischen Identitäten aus Gl. (2.16) zu verwenden. Insbesondere kannst du mit diesen zeigen, dass

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\alpha)\big), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\alpha)\big). \tag{2.22}$$

   Wenn du nicht mehr weiter weißt, kannst du auch Wolfram Alpha nutzen.

Übungsaufgabe 2.8: Arm- und Beinbruch (herausfordernd)



Alice und Bob erkunden gerne die Wildnis rund um ihre Stadt. Dafür haben sie zwei große Gorilla-Roboter gebaut, die das unwegsame Gelände navigieren können und sie dabei bequem auf dem Rücken tragen. Aber heute ist kein guter Tag für Bob, sein Roboter ist von einer Klippe gefallen! Zum Glück überlebt Bob den Sturz mit nur ein paar blauen Flecken, aber dem Roboter geht es nicht so gut: ein Arm, ein Bein und das Kommunikationsmodul sind kaputt gegangen. Bob hat leider keine Ersatzteile für die Arme und Beine mitgebracht, schafft es aber zumindest das Kommunikationsmodul kurzzeitig zu reparieren. Dummerweise kann er nur ein einzelnes Qubit senden, bevor es ganz kaputt geht. Bob würde gerne Alice Bescheid geben, welches Bein (links oder rechts) und welcher Arm (links oder rechts) kaputt ist, damit sie das entsprechende Bauteil von ihrem Roboter zu ihm herunter schicken kann. Sie kann ihm aber nur ein Gliedmaß geben, da beide Roboter noch nach Hause laufen können müssen (sie können zum Glück auf drei Beinen laufen). Die Situation ist aber noch komplizierter, da Alice nicht ihr ganzes Werkzeug mitgebracht hat. Bob weiß, dass sie entweder das Werkzeug zum abmontieren von Beinen oder Armen dabei hat – leider kann er sich nicht daran erinnern welches von beiden!

Es gibt vier mögliche Kombinationen, in denen die Arme und Beine gebrochen sein können – du kannst annehmen dass alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/4$ auftreten. Weiterhin gibt es zwei mögliche Werkzeuge, die Alice dabei haben könnte und du kannst annehmen, dass beide mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftreten.

Fragen:

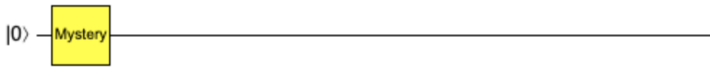
1. Wenn Bob nur ein Bit an Alice senden kann, wie sollte er den Wert auswählen, je nachdem welche der vier Möglichkeiten eingetroffen ist? Wie sollte Alice die Nachricht interpretieren und entscheiden welches Gliedmaß, linkes oder rechtes, sie ihm senden sollte? (Denk daran, dass Alice entweder nur Beine oder nur Arme senden kann und Bob nicht weiß welches von beiden der Fall ist.) Wenn beide die optimale Strategie nutzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit interpretiert Alice die Nachricht richtig und sendet das richtige Körperteil an Bob?

2. Was, wenn Bob stattdessen ein Qubit senden kann? Je nach seiner Situation kann er einen von vier Zuständen wählen und Alice kann abhängig von ihrer Situation eine von zwei Rotationen anwenden, bevor sie das Qubit misst. Was ist ihre gemeinsame beste Strategie und welche Erfolgswahrscheinlichkeit hat sie?

Du kannst annehmen, dass Alice und Bob wissen, wie sie ihre Nachrichten interpretieren müssen, da sie im Voraus darüber gesprochen haben, was sie in dieser Notsituation machen sollten.

2.5.1 Noch eine mysteriöse Operation

Wir haben noch immer nicht über die gelbe Box in QUIRKY geredet. Im Gegensatz zu der mysteriösen Operation von letzter Woche, welche auf klassischen Bits funktioniert hat, arbeitet diese auf Qubits. Lass uns die mysteriöse Quanten-Operation einfach M nennen. Wie können wir herausfinden, was in der Box passiert? Als ersten Schritt können wir herausfinden, was $M|0\rangle$ ist. In QUIRKY können wir diesen Zustand wie folgt generieren:



Man nennt das Problem, einen unbekannten Quantenzustand herausfinden zu wollen, auch Quantentomographie, da man einen unbekannten Quantenzustand 'von außen' durch verschiedene Messungen bestimmen möchte. Es handelt sich dabei um eine grundlegende Problemstellung, mit denen sich experimentell Forschende täglich auseinandersetzen müssen, wenn sie prüfen wollen, ob das Qubit sich in dem Zustand befindet, in den sie es versetzen wollten!

Wir können schon eine Menge Informationen bekommen, wenn wir eine Messung auf dem unbekannten Zustand ausführen. Um das klar sehen zu können, schreiben wir

$$M|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir eine Quantenmessung durchführen, erhalten wir laut Gl. (2.6) das Ergebnis 1 mit Wahrscheinlichkeit ψ_1^2. Das bedeutet, wenn wir das obige Experiment sehr häufig wiederholen, erwarten wir, dass der Anteil der Messungen mit Ergebnis 1 in etwa ψ_1^2 ist. Dieses Verhalten ist komplett analog zu dem mehrfachen Werfen der Münze und anschließendem zählen der Ergebnisse, das wir letzte Woche in §1.3 besprochen haben. Das liefert uns ein Verfahren zur Schätzung von ψ_1^2. In QUIRKY können wir einfach die Wahrscheinlichkeitenanzeige nach der Messung nutzen, um die Wahrscheinlichkeit vom Ergebnis 1 herauszufinden:

Wir stellen also fest, dass $\psi_1^2 \approx 11.7\%$. Da $M|0\rangle$ ein Einheitsvektor ist, können wir außerdem schlussfolgern, dass $\psi_0^2 = 1 - \psi_1^2 \approx 88.3\%$. Jedoch können Amplituden auch negativ sein, also

bestimmt das ψ_0 und ψ_1 nur bis auf das Vorzeichen! Erinnere dich nun aus Übungsaufgabe 2.7 daran, dass $|\psi\rangle$ und $-|\psi\rangle$ ununterscheidbar sind, also können wir $|\psi\rangle = M|0\rangle$ höchstens bis auf ein allgemeines Vorzeichen bestimmen. Daher bleiben zwei Möglichkeiten:

$$\pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%}\\ \sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}\sqrt{88.3\%}\\ -\sqrt{11.7\%}\end{pmatrix}$$

Beachte, dass diese Situation der aus Übungsaufgabe 2.6 sehr ähnelt, wo wir zwischen $|+\rangle$ und $|-\rangle$ unterscheiden mussten. In der letzten Hausaufgabe für diese Woche wirst du genauer herausfinden, wie die mysteriöse Box von Innen aussieht.

Hausaufgabe 2.6: Zeit für ein Mysterium

1. Wie kannst du zwischen den beiden Optionen unterscheiden? Nutze QUIRKY um den Quantenzustand $M|0\rangle$ bis auf allgemeines Vorzeichen festzustellen.
2. Bestimme genauso auch den Quantenzustand $M|1\rangle$.
3. *Bonusfrage:* Bestimmen die beiden Antworten die Operation M vollständig? Falls ja, schreibe eine Formel für M auf. Falls nicht, wie kannst du M herausfinden?

2.6 Exkurs zur Physik (optional)

Unser Hauptfokus der *Quantum Quest* liegt auf der *Mathematik* der Quanteninformatik. Da aber überall auf der Welt schon kleine Quantencomputer in Laboren gebaut werden, ist es auch sinnvoll, etwas über die physikalischen Grundlagen der Quanteninformatik zu wissen. Mithilfe welcher physikalischen Effekte funktionieren Quantencomputer überhaupt?

2.6.1 Interferenz

Einer der wichtigsten physikalischen Effekte, den sich Quantencomputer zunutze machen, ist die Interferenz – die Interaktion zwischen zwei sich überlappenden Wellen oder Oszillationen. Du kannst Interferenzen zum Beispiel in der Form der Wellen von zwei aneinander vorbeifahrenden Booten beobachten, oder indem du zwei Steine gleichzeitig in einen See wirfst und dir die Wellenmuster anschaust. Wenn sich die Wellen gegenseitig verstärken, nennt man das *konstruktiv*, wenn sie sich dagegen gegenseitig aufheben sind sie *destruktiv* (siehe Abb. 2.7).

Interferenz tritt auch in anderen Umgebungen auf, beispielsweise bei Schallwellen. Vielleicht kennst du ja destruktive Interferenz schon von Noise-Cancelling Kopfhörern. Diese funktionieren, indem sie störende Hintergrundgeräusche aufnehmen und mit umgedrehter Oszillationsrichtung wieder abspielen. Überlagern sich diese zwei Schallwellen dann, so heben sie sich gegenseitig auf: $1 - 1 = 0$. Würden die Kopfhörer die Oszillationsrichtung nicht umkehren, würdest du die Geräusche viel lauter hören: $1 + 1 = 2$. Dann wären deine Kopfhörer praktisch Hörgeräte!

Mit Qubits können wir im Gegensatz zu probabilistischen Bits *beide* Arten von Interferenz nutzen – konstruktive und destruktive – während probabilistische Berechnungen nur konstruktive Interferenz nutzen können. Mathematisch können wir das mit der Flip-Operation $F(1/2)$ und der Hadamard-Operation H aus Gl. (1.14) und (2.20) zeigen:

$$\begin{aligned} F(1/2)\,[0] &= \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1], & H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ F(1/2)\,[1] &= \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1], & H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \end{aligned} \tag{2.23}$$

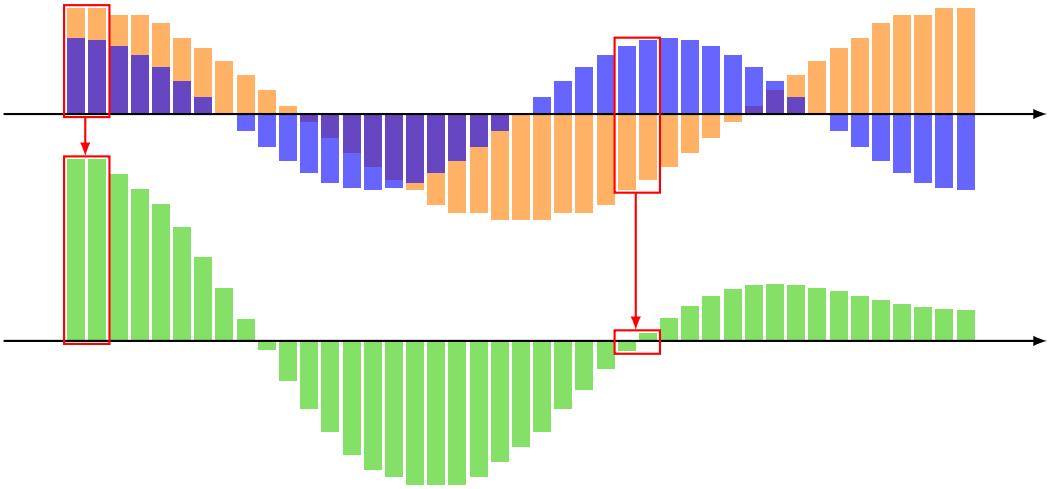


Abbildung 2.7: Interferenz zweier Wellen: die Amplituden der blauen und orangenen Wellen addieren sich an jeder Stelle zu der Amplitude der grünen auf. Wenn beide Wellen das gleiche Vorzeichen haben, ist die Interferenz *konstruktiv* und resultiert in einer noch höheren Amplitude. Haben die Wellen dagegen gegensätzliche Vorzeichen, ist die Interferenz *destruktiv* und die Amplitude schrumpft.

Bis auf die Quadratwurzeln sind beide Operationen fast identisch. Allerdings unterscheidet sich $F(1/2)\,[1]$ durch das Plus von $H\,|1\rangle$, welches ein Minus hat. Das scheint nur ein kleiner Unterschied zu sein, aber dieser hat große Folgen.

Lass uns doch einmal anschauen wie sich diese zwei Operationen auf die Gleichverteilung $\frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1]$ und deren quanten-analog, den Plus-Zustand $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle$ auswirken. Die Flip-Operation $F(1/2)$ hat folgenden Effekt auf die Gleichverteilung:

$$\begin{aligned} F(1/2)\left(\frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1]\right) &= \frac{1}{2}\,F(1/2)\,[0] + \frac{1}{2}\,F(1/2)\,[1] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1]\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1]\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)[0] + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)[1] \\ &= \frac{1}{2}\,[0] + \frac{1}{2}\,[1], \end{aligned}$$

wobei wir die Linearität und Gl. (2.23) angewandt, sowie die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $[0]$ und $[1]$ zusammengefasst haben. Beachte, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für $[1]$ der beiden Terme zu $1/2$ verstärken. Das entspricht unserer Intuition: wenn man eine uniform zufällige Münze uniform zufällig flippt, bleibt sie uniform zufällig.

Jetzt betrachten wir aber den Effekt der Hadamard-Operation auf den Plus-Zustand $|+\rangle$:

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,H\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,H\,|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \\ &= |0\rangle\,. \end{aligned}$$

Die Berechnung ist sehr ähnlich, das Ergebnis aber ein vollkommen anderes – die Amplituden von $|1\rangle$ heben sich vollständig auf und übrig bleibt nur $|0\rangle$. Eine solche destruktive Interferenz

ist mit probabilistischen Bits nicht möglich, da die Wahrscheinlichkeiten immer positiv sind – sie können sich nur verstärken, nicht aufheben.

Zwar sind probabilistische und Quanten-Bits sehr ähnlich, allerdings zeigt das Beispiel, dass sie sich dank destruktiver Interferenz sehr unterschiedlich verhalten. Viele der Quantenüberraschungen, die du in den nächsten Wochen kennenlernen wirst, sind auf die eine oder andere Art auf dieses Phänomen zurückzuführen. Die Existenz von destruktiven Interferenzen ist ein Grund, warum Quantencomputer einen Vorteil gegenüber klassischen Computern haben – sie ermöglicht es dem Quantencomputer die richtige Antwort auszugeben, während falsche Antworten sich durch destruktive Interferenz aufheben. Wie wir in Quests 4 und 5 mit mehr Detail besprechen werden, hilft dabei häufig das Hadamard-Gatter, welches eine wichtige Rolle in Quantenalgorithmen spielt.

2.6.2 Polarisation

Da wir uns nun schon ausgiebig mit mathematischen Konzepten von Quantenzuständen und -Operationen beschäftigt haben, können wir uns ja mal die physikalischen Äquivalente anschauen.

Eine der einfachsten physikalischen Repräsentationen eines Qubits ist durch Polarisation von Licht. Licht ist eine elektromagnetische Welle, die sich geradlinig im Raum ausbreitet. Diese Welle oszilliert (schwingt) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Beachte, dass es viele verschieden Oszillationsrichtungen geben kann – eine sich vorwärts bewegende Welle kann von links nach rechts oder oben nach unten oszillieren. Diese verschiedenen Zustände können wir als Basiszustände eines Qubits interpretieren:

$$|\leftrightarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\updownarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Noch allgemeiner können wir eine Welle, die im Winkel θ zur horizontalen Achse schwingt durch den folgenden Zustand darstellen:

$$|\psi(\theta)\rangle = \cos\theta\,|\leftrightarrow\rangle + \sin\theta\,|\updownarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

So entspricht diagonal polarisiertes Licht, welches um einen 45° Winkel zwischen der horizontalen und vertikalen Achse oszilliert, dem Zustand $|\psi(\pi/4)\rangle = |+\rangle$. Beachte, dass der Winkel der Oszillation der Welle in dieser Darstellung mit dem Winkel des Vektors aus Abb. 2.1 in §2.1.2, der einen Quantenzustand auf dem Einheitskreis darstellt, entspricht.

Um einen dieser Zustände herzustellen, schicken wir einfach einen Lichtstrahl durch einen Polarisationsfilter, wie er in Sonnenbrillen oder 3D Brillen benutzt wird. Ein Polarisationsfilter lässt dabei nur manche Wellen durch – jene, deren Oszillationsrichtung der des Polarisationsfilters entsprechen. Für den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ können wir also einfach den Filter um den Winkel θ von der horizontalen Achse weg drehen. Beispielsweise sind in Abb. 2.8 die Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|+\rangle$ dargestellt.

Eine interessante Eigenschaft der Darstellung von Quantenzuständen durch polarisiertes Licht ist, dass die Zustände $|\psi(\theta)\rangle$ und $|\psi(\theta+\pi)\rangle$ auf gleiche Weise hergestellt werden – durch Drehen des Filters um einen Winkel θ. Also müssen diese beiden Zustände identisch sein! Damit liefert uns Polarisation eine Intuition, wieso $|\psi\rangle$ und $-|\psi\rangle$ ununterscheidbar sein sollten (siehe Übungsaufgabe 2.7).

Eine weitere schöne Eigenschaft der Darstellung von Qubits durch polarisiertes Licht ist, dass wir Messungen leicht visualiseren können. Angenommen, wir wollen den Zustand $|\psi(\theta)\rangle$ messen und die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 0 herausfinden. Wenn wir den Zustand als Lichtstrahl gegeben haben, der um den Winkel θ polarisiert ist, können wir diesen einfach durch einen horizontalen Polarisationsfilter schicken und messen, wie viel Licht herauskommt

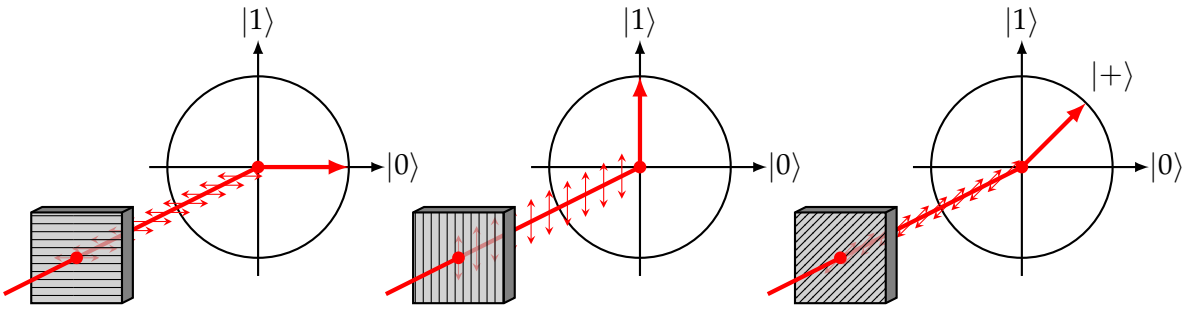


Abbildung 2.8: Horizontal, vertikal und diagonal polarisiertes Licht können die Quantenzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|+\rangle$ darstellen.

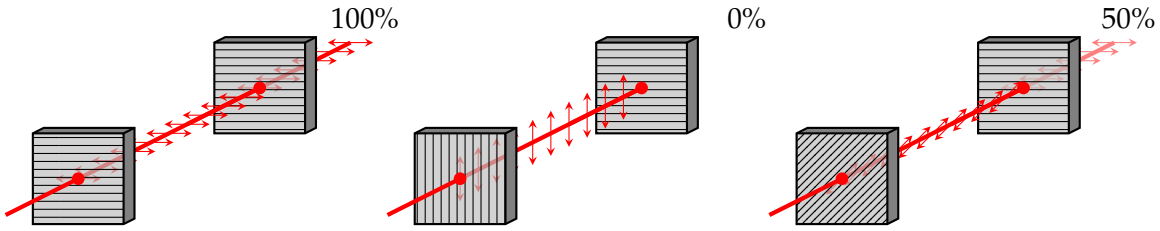


Abbildung 2.9: Man kann die Menge des horizontal polarisierten Lichts messen, indem man es durch einen horizontalen Polarisationsfilter schickt und anschließend die Helligkeit misst. Für jeweils horizontal, vertikal und diagonal polarisiertes Licht sind die Messergebnisse dabei 100%, 0% und 50% der Helligkeit, was den Wahrscheinlichkeiten des Messergebnisses 0 beim Messen der Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|+\rangle$ entspricht.

– wenn sich die Helligkeit auf 70% reduziert, so ist die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 0 genau 70%. Insbesondere wird ein horizontal polarisierter Lichtstrahl komplett herauskommen, während ein vertikal polarisierter Lichtstrahl nicht hindurchkommt. Einen diagonal polarisierten Lichtstrahl durch einen horizontalen Polarisationsfilter zu schicken, wird in einem 50% dunkleren Lichtstrahl resultieren (siehe Abb. 2.9).

Übungsaufgabe 2.9: Experimentieren mit Polarisationsfiltern

Falls du eine polarisierte Sonnenbrille Zuhause hast, kannst du sie einmal aufsetzen und auf einen PC- oder Handybildschirm schauen. Normalerweise strahlen Bildschirme polarisiertes Licht aus (wobei die Polarisationsrichtung vom Gerät abhängt). Wenn du also deinen Kopf zur Seite kippst, sollte der Bildschirm heller oder dunkler erscheinen. Kannst du erklären, warum das so ist?

Polarisiertes Licht ist nur eine Methode unter vielen, mit denen man Qubits in Laboren darstellen kann. Ein anderes Beispiel ist die *location* (engl. für "Position") eines lichttransportierenden Teilchens namens Photon – da ein Photon sich nach den Gesetzen der Quantenmechanik verhält, kann es gleichzeitig an zwei Positionen gleichzeitig sein – in *superpositon* (engl. für "Überlagerung"). Wenn wir diese Positionen 0 und 1 nennen, entspricht der Zustand des Photons einem Qubit. Es gibt auch noch eine Menge anderer Möglichkeiten: In supraleitenden Schaltungen kann Strom in beide Richtungen gleichzeitig fließen, ein Elektron kann sich in zwei Orbitalen eines Atoms gleichzeitig befinden und so weiter. Kurz gesagt kann sich jedes quantenmechanische System, das sich in zwei unterscheidbaren Zuständen befinden kann, auch in deren Überlagerung befinden, also als physikalische Repräsentation eines Qubits genutzt werden.

2.7 Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung Übungsaufgabe 2.1

Beachte, dass

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = |\psi(\pi/4)\rangle\,, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = |\psi(-\pi/4)\rangle\,.$$

Also müssen die Winkel $\theta = \pm\pi/4$ sein und die Zustände jeweils 45 Grad über und unter $|0\rangle$ sein.

Lösung Übungsaufgabe 2.2

Sei $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ein gültiger Quantenzustand. Da MAD aus erweitern durch Linearität entsteht, impliziert Gl. (2.8), dass

$$\begin{aligned}\mathrm{MAD}\,|\psi\rangle &= \mathrm{MAD}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{MAD}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{MAD}\,|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\,.\end{aligned}$$

Aber

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1,$$

also ist $\mathrm{MAD}\,|\psi\rangle$ kein gültiger Quantenzustand.

Lösung Übungsaufgabe 2.3

1. $U(\alpha)$ wirkt sich wie folgt auf einen beliebigen Zustand aus:

$$\begin{aligned}U(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_0\\\psi_1\end{pmatrix} &= U(\alpha)\left(\psi_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \psi_0\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix} + \psi_1\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\psi_0\cos\alpha - \psi_1\sin\alpha\\\psi_0\sin\alpha + \psi_1\cos\alpha\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Da $|\psi(\beta)\rangle = \begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}U(\alpha)\,|\psi(\beta)\rangle = U(\alpha)\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\\\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix} \\ &= |\psi(\alpha+\beta)\rangle\,.\end{aligned}$$

Lösung Übungsaufgabe 2.4

Nimm einen beliebigen Zustand $\psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$, nutze zunächst Linearität von M und anschließend die Linearität von N:

$$\begin{aligned} NM(\psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle) &= N\big(M(\psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle)\big) \\ &= N\big(\psi_0 M |0\rangle + \psi_1 M |1\rangle\big) = \psi_0 NM |0\rangle + \psi_1 NM |1\rangle . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Gl. (2.10) genutzt.

Lösung Übungsaufgabe 2.5

Es gilt $(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$, da für jedes $|\psi\rangle$ gilt

$$M^{-1}N^{-1}NM |\psi\rangle = M^{-1}(N^{-1}N(M |\psi\rangle)) = M^{-1}(M |\psi\rangle) = M^{-1}M |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

und

$$NMM^{-1}N^{-1} |\psi\rangle = N(MM^{-1}(N^{-1} |\psi\rangle)) = N(N^{-1} |\psi\rangle) = NN^{-1} |\psi\rangle = |\psi\rangle .$$

Lösung Übungsaufgabe 2.6

Wende $U(-\pi/4)$ an und messe. Du kannst die Zustände mit Sicherheit erraten!

Lösung Übungsaufgabe 2.7

Wir haben bereits gesehen, dass jede Kombination M an Rotationen und Spiegelungen linear ist. Damit folgt aus $M |\psi(\theta)\rangle = |\psi(\theta')\rangle = \binom{\cos\theta'}{\sin\theta'}$, dass $M\big(- |\psi(\theta)\rangle\big) = - |\psi(\theta')\rangle = \binom{-\cos\theta'}{-\sin\theta'}$. Nach Gl. (2.6) sind die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der Messergebnisse für beide Zustände gleich.

Lösung Übungsaufgabe 2.9

Wenn du deinen Kopf neigst, änderst du den Winkel zwischen dem Polarisationsfilter in deiner Sonnenbrille und der Richtung in welcher das Licht des Bildschirms polarisiert ist. Da die Menge des Lichts, das durch den Filter kommt, von diesem Winkel abhängt, ändert sich die Helligkeit. Genauso wird ein ändern des Winkels θ die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses 0 beim Messen von $|\psi(\theta)\rangle$ ändern.

Lösung Übungsaufgabe 2.8

Idealerweise würde Bob gerne 2 Bit senden wollen, um zu zeigen welcher Arm und welches Bein defekt ist. Aber Alice interessiert sich nur für eins dieser Bits, da sie eh nur für eins das richtige Werkzeug dabei hat.

1. Lass uns die zwei möglichen Zustände für jedes der beiden Bits als L (links) und R (rechts) nennen. Eine mögliche Strategie für Bob ist der "Mehrheitsentscheid" der beiden Bits. Er könnte also die Zustände wie folgt abbilden:$LL \mapsto L$, $RR \mapsto R$. Die beiden anderen Zustände kann er beliebig kodieren, zum Beispiel so: $LR \mapsto L$, $RL \mapsto R$. Alice' Strategie besteht dann einfach, das entsprechende Gliedmaß an ihn zu senden (links wenn sie L erhält, R ansonsten). Das funktioniert mit Wahrscheinlichkeit

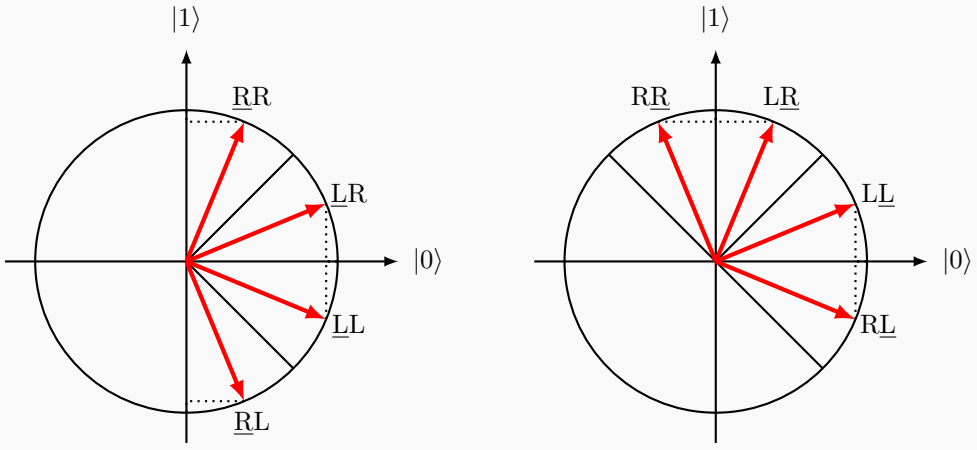
$$\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0.75, \tag{2.24}$$

   wobei die vier Terme in den Klammern den Wahrscheinlichkeiten entsprechen, dass Alice jeweils das richtige Körperteil schickt für jede der vier Situationen.

2. Bob kann die folgenden Quantenzustände senden, je nachdem welche Gliedmaßen defekt sind (LR bedeutet linkes Bein und rechter Arm usw.)

$$\begin{aligned}
|LL\rangle &= \cos(\pi/8)\,|0\rangle - \sin(\pi/8)\,|1\rangle \\
|LR\rangle &= \cos(\pi/8)\,|0\rangle + \sin(\pi/8)\,|1\rangle \\
|RR\rangle &= \cos(3\pi/8)\,|0\rangle + \sin(3\pi/8)\,|1\rangle \\
|RL\rangle &= \cos(3\pi/8)\,|0\rangle - \sin(3\pi/8)\,|1\rangle
\end{aligned}$$

   Um aus diesem Zustand das Bit über das Bein zu extrahieren, misst sie einfach. Wenn sie das Bit Information über den Arm haben möchte, wendet sie vor dem Messen noch $U(\pi/4)$ an. (Beachte, dass sie nicht beide Bits an Information extrahieren kann, da der ursprüngliche Zustand nach dem Messen zerstört ist.) Diese Strategie wird mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2(\pi/8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.85$ erfolgreich sein. Das ist besser als im vorigen Szenario!



Quest 3: Verzaubernde Verschränkungen

In den letzten zwei Wochen haben wir darüber gesprochen, wie sich ein einzelnes probabilistisches Bit und ein einzelnes Qubit verhält. Diese Woche wirst du lernen, was passiert, wenn du zwei zur Verfügung hast. Zunächst werden wir lernen, wie sich zwei klassische Bits verhalten, welche Zustände sie haben können und wie sie *korrelieren*. Anschließend werden wir uns analog zwei Qubits anschauen und herausfinden, was es heißt, wenn diese *verschränkt* (engl. *entangled*) sind.

3.1 Zwei probabilistische Bits

Zwei nebeneinander liegende Münzen können sich in folgenden vier möglichen Zuständen befinden:

Diese entsprechen den vier möglichen Bitstrings[11]:00, 01, 10, 11.

Der Zustand eines Paares von probabilistischen Bits ist durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung über diese vier deterministische Zustände gegeben. Mit anderen Worten, der Zustand wird durch die vier Zahlen $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11} \geq 0$ definiert, wobei $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$. Genau wie im Falle eines einzelnen Bits können wir diesen Zustand in Vektorschreibweise so schreiben:

$$\begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Diese Darstellung ist zwar akkurat, kann aber schnell verwirrend werden, weil man aufpassen muss welche Wahrscheinlichkeit wo steht (kommt p_{10} zuerst oder doch p_{01} ?!) und es wird nur komplizierter, je mehr Bits man hat. Viel einfacher ist es, eine Notation zu verwenden, die die Wahrscheinlichkeiten direkt den entsprechenden Bitstrings zuweist. Dafür erweitern wir die Schreibweise aus Gl. (1.3) von einem probabilistischen Bit auf zwei und beschreiben den obigen Zustand so:

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]. \tag{3.2}$$

Wenn du möchtest, kannst du diese Gleichung mit den folgenden verallgemeinerungen von Gl. (1.2) auf Gl. (3.1) zurückführen:

$$[00] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [01] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [10] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [11] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Ein Vorteil dieser Notation ist, dass wir im Falle von mehreren Bits Einträge die 0 sind einfach ignorieren können. So können wir zum Beispiel schreiben

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$$

[11] Mit einem 'String' bezeichnen wir eine Zeichenkette, in diesem Fall bestehend aus Bitwerten. Wir werden mehrere Münzen oder Qubits hauptsächlich durch solche Strings darstellen.

anstelle von der klobigeren Notation

$$\frac{1}{2}[00] + 0\,[01] + 0\,[10] + \frac{1}{2}[11].$$

Mit dieser Notation ist es außerdem viel einfacher Messungen und Operationen auf vielen probabilistischen Bits darzustellen. Mit QUIRKY können wir ein bisschen mit zwei probabilistischen Bits herumspielen, denn das Tool hat wieder neue Fähigkeiten bekommen. Gehe zunächst zu

https://www.quantum-quest.org/quirky

und klicke auf "Quest 3" und wähle "Two Bits" aus. QUIRKY sollte dann in etwa wie in Abb. 3.1 aussehen. Wie du siehst gibt es jetzt *zwei* Drähte, die zwei Bits entsprechen, welche im Zustand $[00]$ starten. Vielleicht überrascht es dich, dass das *untere* Bit das erste ist und das *obere* das zweite. Außerdem gibt es eine neue Operation in der Toolbox: $\boxed{\bullet}$ (aber dafür fehlt die Mystery-Box). Die Funktion dieser Box besprechen wir später in diesem Kapitel.

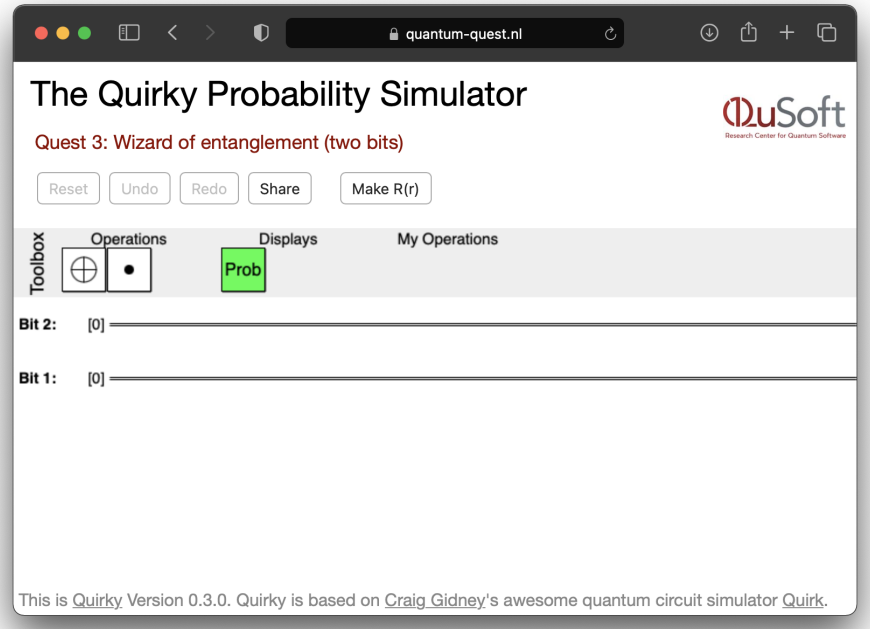
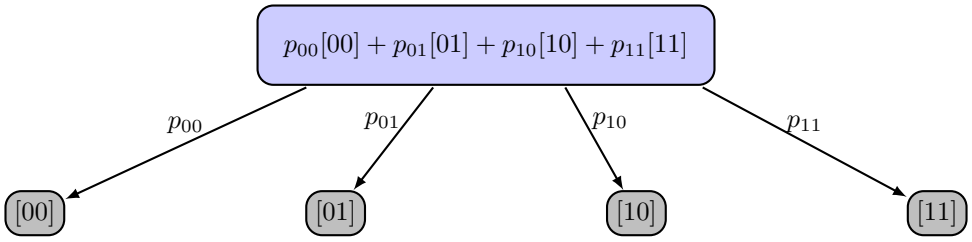


Abbildung 3.1: QUIRKY für Quest 3.

3.1.1 Beide Bits messen

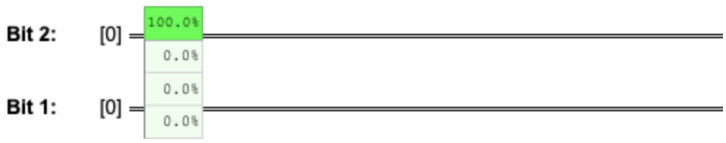
Zwei Bits zu messen (oder "anzuschauen") funktioniert genauso wie in Gl. (1.18) bei einem Bit. Du erhältst einen der vier möglichen Ergebnisse (00, 01, 10, 11) mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit:



(3.4)

Nach der Messung befinden sich die Bits nicht mehr in einer Verteilung über die vier möglichen Zustände sondern in einer Konfiguration, die der gemessenen entspricht. Um diesen

Unterschied darzustellen, verwenden wir hellblau für probabilistische Bits und grau für deterministische (also z.B. gemessene). Wie können wir beide Bits in QUIRKY messen? Wir nutzen einfach wieder die Wahrscheinlichkeitsanzeige:



Beachte, dass die Wahrscheinlichkeitsanzeige automatisch mit *beiden* Drähten verbindet, also die Wahrscheinlichkeiten für *beide* Bits anzeigt. Die Reihenfolge der Wahrscheinlichkeiten entspricht der aus der 4-Vektor Notation in Gl. (3.1). Du musst dir die Reihenfolge aber nicht merken, fahre einfach mit dem Mauszeiger über die Tabelle, um dich an sie zu erinnern (Dankeschön Craig!).

Zum Beispiel erhalten wir beim Messen zweier probabilistischen Bits im Zustand

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11], \tag{3.5}$$

die beiden Ergebnisse 00 oder 11 jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit. Dir fällt vielleicht auf, dass dieser Zustand besonders ist – wenn das Messergebnis des ersten Bits 0 ist, wissen wir automatisch, dass das zweite Bit auch 0 sein muss und genauso für das Ergebnis 1. Da die Messergebnisse beider Bits immer identisch sind, nennen wir die beiden Bits in Zustand Gl. (3.5) perfekt korreliert. Wie man so einen Zustand herstellt wirst du gleich lernen.

3.1.2 Lokale Operationen

Auf zwei oder mehr probabilistischen Bits kann man eine Vielzahl verschiedener Operationen ausführen. Insbesondere kann man entweder auf allen gleichzeitig eine globale Operation oder auf einem einzelnen Bit eine lokale Operation ausführen. Zunächst betrachten wir nur lokale Operationen.

Erinnere dich an die NOT-Operation aus §1.2, die ein einzelnes Bit flippt. Was passiert, wenn wir zwei Bits haben, aber NOT nur auf eines davon anwenden? In diesem Fall sollte das erste Bit geflippt werden, während das zweite unverändert bleibt. Das bedeutet, dass die *lokale* NOT-Operation auf dem ersten Bit, die wir NOT_1 nennen, sich wie folgt verhält:

$$\text{NOT}_1[00] = [10], \quad \text{NOT}_1[01] = [11], \quad \text{NOT}_1[10] = [00], \quad \text{NOT}_1[11] = [01]. \tag{3.6}$$

Analog verhält sich die NOT-Operation auf dem zweiten Bit, also NOT_2, so:

$$\text{NOT}_2[00] = [01], \quad \text{NOT}_2[01] = [00], \quad \text{NOT}_2[10] = [11], \quad \text{NOT}_2[11] = [10]. \tag{3.7}$$

Bisher haben wir die lokale NOT-Operation auf deterministischen Bits beschrieben. Wie sollten wir diese Definition auf probabilistische Bits erweitern? Erinnere dich daran, dass wir in §1.2.1 gezeigt haben, dass jede vollständig auf deterministischen Bits definierte Operation *durch Linearität* auf probabilistische Bits erweitert werden kann. Zum Beispiel verhält sich NOT_2 auf zwei probabilistischen so:

$$\begin{aligned}
&\text{NOT}_2\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right) \\
&\quad = p_{00}[01] + p_{01}[00] + p_{10}[11] + p_{11}[10] \\
&\quad = p_{01}[00] + p_{00}[01] + p_{11}[10] + p_{10}[11],
\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt Gl. (3.7) genutzt haben und anschließend die Terme nach den Zuständen sortiert haben. Das kannst du natürlich auch in der 4-Vektor Notation schreiben, dann ist das Ergebnis aber vielleicht weniger intuitiv:

$$\mathrm{NOT}_2 \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{00} \\ p_{11} \\ p_{10} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

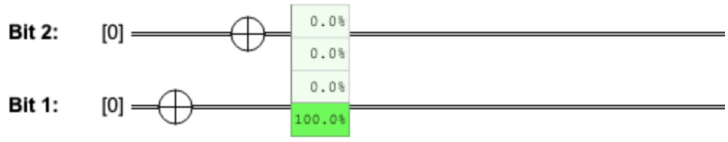
Übungsaufgabe 3.1: NOT_1 in der 4-Vektor Notation (optional)

Schreibe die Auswirkung von NOT_1 auf zwei probabilistischen Bits analog zu Gl. (3.8) in der 4-Vektor Notation.

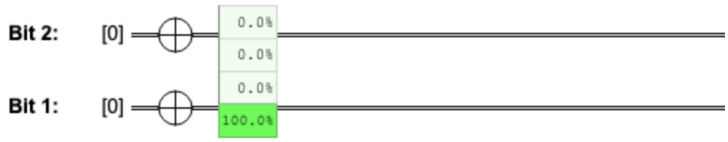
Eine Ein-Bit-Operation kannst du in QUIRKY anwenden, indem du das zugehörige Symbol aus der Toolbox auf den entsprechenden Draht ziehst. Der folgende Schaltkreis generiert zum Beispiel den Zustand $[10]$ und zeigt die Wahrscheinlichkeiten, wenn man beide Bits misst.

Das ergibt Sinn, da der untere Draht in QUIRKY dem ersten Bit entspricht.

Genauso können wir zuerst das eine und anschließend das andere Bit flippen um den Zustand $[11]$ zu erhalten:



Offensichtlich ist die Reihenfolge, in der wir die Operationen anwenden irrelevant. Also können wir sie auch *parallel* anwenden.



Genauso können wir auch zufällige Operationen auf eines der beiden Bits anwenden. Nehmen wir mal an, wir wenden die Operation $R(r)$, die das Bit mit Wahrscheinlichkeit r auf 0 setzt(Gl. (1.13)), auf das erste Bit an. Da $R(r)[0] = [0]$ gilt, erhalten wir

$$R(r)_1[00] = [00], \qquad R(r)_1[01] = [01]. \tag{3.9}$$

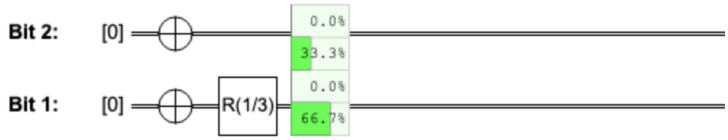
Außerdem gilt $R(r)[1] = r[0] + (1-r)[1]$, woraus folgt, dass

$$R(r)_1[10] = r[00] + (1-r)[10], \qquad R(r)_1[11] = r[01] + (1-r)[11]. \tag{3.10}$$

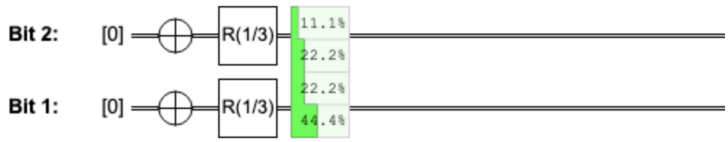
Wenn wir also den Zustand $[11]$ haben und auf das erste Bit $R(1/3)$ anwenden, erhalten wir

$$R(1/3)_1[11] = \frac{1}{3}[01] + \frac{2}{3}[11], \tag{3.11}$$

wie QUIRKY bestätigt:



In der Hausaufgabe schaust du dir das folgende Beispiel an, welches sich noch spannender verhält:



(3.12)

Hausaufgabe 3.1: $R(r)$ auf dem zweiten Bit

1. Schreibe analog zu Gl. (3.9) und (3.10) die Formeln für $R(r)_2$ auf.
2. Erkläre, warum das Ergebnis von QUIRKY in Gl. (3.12) richtig ist.

3.1.3 Nur ein Bit messen

Wenn du zwei probabilistische Bits gegeben hast und nur eines der Beiden messen willst, welche Wahrscheinlichkeiten haben dann die zwei möglichen Ergebnisse? Unsere Notation ist in diesem Fall sehr praktisch. Schauen wir uns doch nochmal den allgemeinen Zwei-Bit-Zustand an:

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11].$$

Um die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis 0 eines Bits zu erhalten, müssen wir nur die Summe über die Wahrscheinlichkeiten aller Zustände bilden, in denen das Bit den richtigen Wert hat.

Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, das Ergebnis 1 beim messen des *ersten* Bits zu erhalten

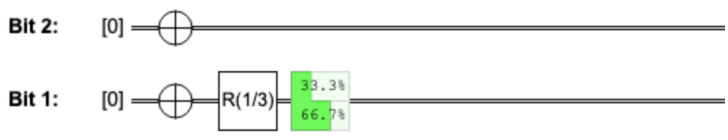
$$p_{10} + p_{11}, \tag{3.13}$$

die den Wahrscheinlichkeiten für die Zustände $[10]$ und $[11]$ aus Gl. (3.4) entsprechen, da das die beiden Bitstrings sind, die mit 1 beginnen. Genauso ist die Wahrscheinlichkeit beim messen des *zweiten* Qubits 0 zu erhalten

$$p_{00} + p_{10},$$

die den Wahrscheinlichkeiten für die Zustände $[00]$ und $[10]$ entsprechen, welches die Bitstrings sind, die auf 0 enden. Wenn man die vier Wahrscheinlichkeiten in einer 2×2 Form wie in Abb. 3.2 darstellt wird die Berechnung noch einfacher.

Wir können auch QUIRKY benutzen um die Wahrscheinlichkeiten einer Ein-Bit-Messung anzuzeigen. Verkleinere einfach die Wahrscheinlichkeitsanzeige auf das gewünschte Bit, zum Beispiel so:



Tatsächlich können wir beide Bits einzeln messen und uns beide Messergebnisse gleichzeitig anzeigen lassen:

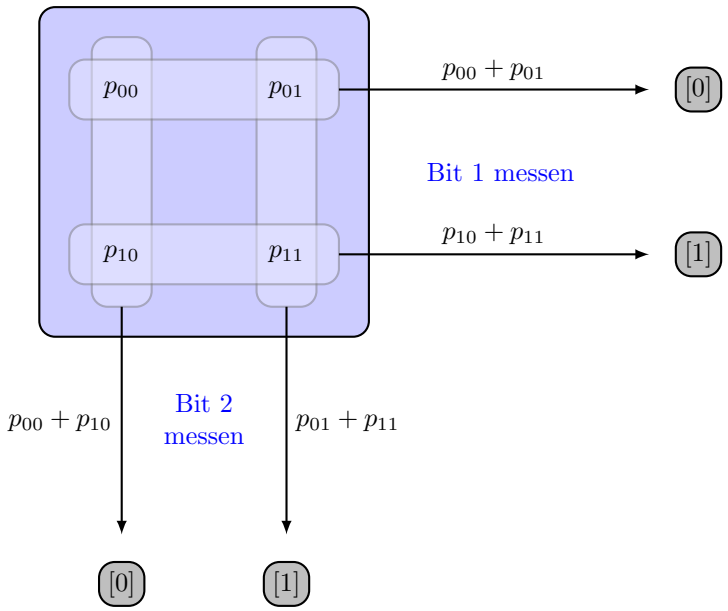
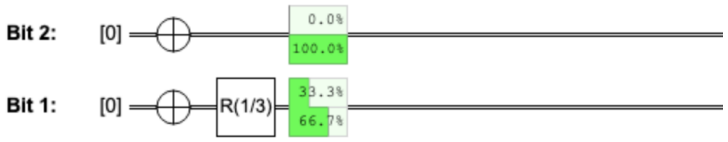


Abbildung 3.2: Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse wenn nur eines der beiden probabilistischen Bits gemessen wird.



Das Ergebnis ist sehr intuitiv. Da die beiden Bits nie "korrelieren" ist klar, dass das erste Bit im Zustand $\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]$ und das zweite im Zustand $[1]$ sein muss.

3.1.4 Der Zustand des anderen Bit

Nachdem ein Bit gemessen wurde, befindet sich dieses in dem entsprechenden deterministischen Zustand (genau, wie bei der Messung eines einzelnen Bits in Gl. (1.18)). Aber was ist mit dem anderen Bit, das nicht gemessen wurde? Im Allgemeinen befindet sich dieses nicht in einem deterministischen Zustand. Wenn zum Beispiel im Zustand

$$\frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11] \tag{3.14}$$

das erste Bit gemessen wird, erhält man mit Wahrscheinlichkeit $1/2 + 1/2 = 1$ das Ergebnis 1. Mit anderen Worten, das erste Bit im Zustand aus Gl. (3.14) ist deterministisch, die Wahrscheinlichkeiten beschreiben also nur das zweite Bit. Du kannst dir diesen Zustand also als "Kombination" der beiden getrennten Zustände $[1]$ und $\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]$ vorstellen (in §3.1.7 werden wir uns näher mit dem Kombinieren von probabilistischen Bits beschäftigen). Daher ist es nur logisch, dass das zweite Bit sich nach der Messung in einer Gleichverteilung befindet, also im Zustand

$$\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1].$$

Im Allgemeinen starten wir mit zwei probabilistischen Bits in einem beliebigen Zustand

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11] \tag{3.15}$$

und messen das erste Bit. Dann wird der Zustand des anderen Bits vom Ergebnis der Messung abhängen. Wenn das Messergebnis beispielsweise 1 war, betrachten wir wieder alle Terme aus

Gl. (3.15), in denen das erste Bit den Zustand 1 hat:

$$p_{10}[10] + p_{11}[11].$$

Dann ignorieren wir das erste Bit, da wir bereits wissen, dass es den Wert 1 hat:

$$p_{10}[0] + p_{11}[1].$$

Und schließlich, da die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten nicht zwingend 1 ergibt, teilen wir sie durch ihre Summe $p_{10} + p_{11}$:

$$\frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}}[0] + \frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}[1]. \tag{3.16}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweiten Bits, wenn die Messung des ersten Bits 1 ergeben hat (siehe rechts in Abb. 3.3). Die übrigen Fälle sind auch in Abb. 3.3 zusammengefasst.

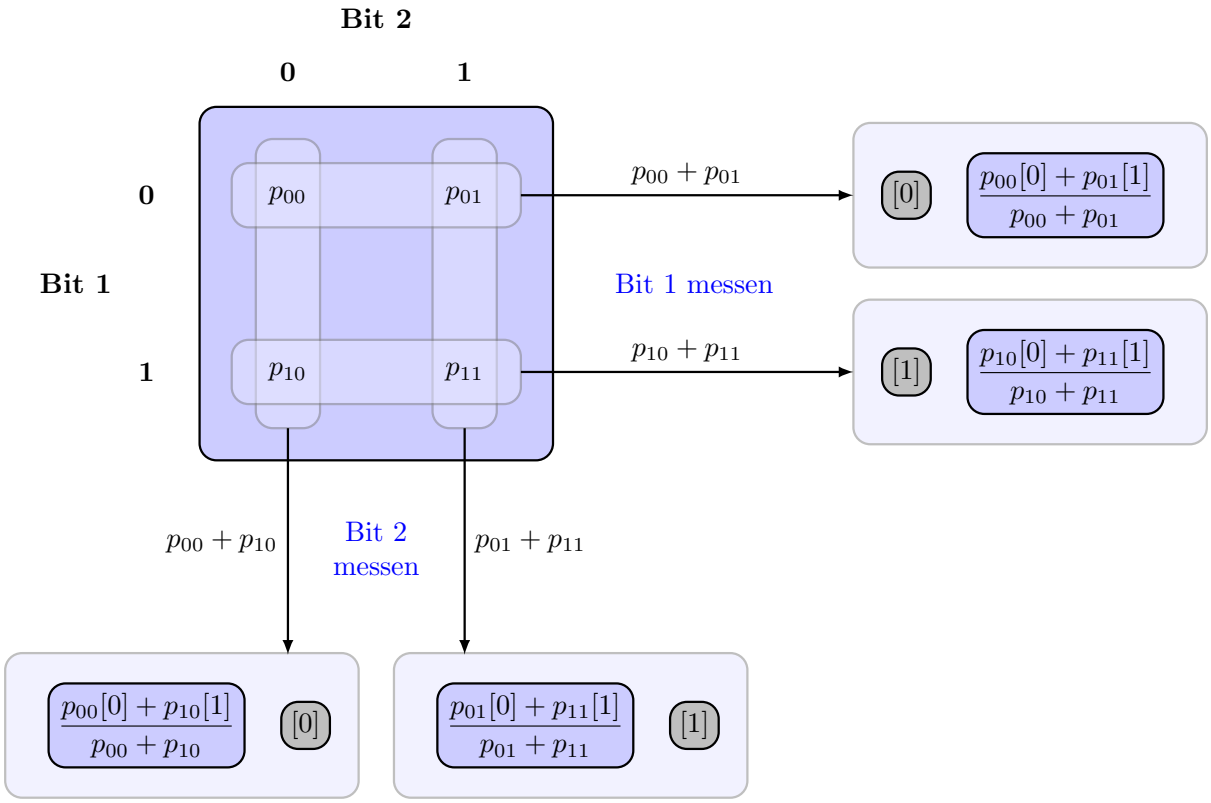


Abbildung 3.3: Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse und die korrespondierenden Zustände des übrigen Bits, nachdem eines von zwei probabilistischen Bits gemessen wurde. Nach der Messung ist das gemessene Bit deterministisch (grau) während das andere probabilistisch bleibt (hellblau).

Um diese Regeln besser zu verstehen, zeigen wir, dass es keinen Unterschied macht, ob man beide Bits gleichzeitig misst oder zunächst das eine und anschließend das andere. So sollte die Wahrscheinlichkeit, 1 vom ersten Bit und 0 vom zweiten Bit zu erhalten einfach p_{10} sein. Tatsächlich erhalten wir das Ergebnis 1 beim messen des ersten Bits laut Gl. (3.13) mit Wahrscheinlichkeit $p_{10} + p_{11}$ und mit diesem Ergebnis muss laut Gl. (3.16) die Messung des zweiten Bits 0 mit Wahrscheinlichkeit $p_{10}/(p_{10} + p_{11})$ ergeben. Damit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit für den Fall, dass wir zunächst 1 vom ersten und anschließend 0 vom zweiten Bit erhalten

$$(p_{10} + p_{11}) \times \frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}} = p_{10},$$

was genau dem erwarteten Ergebnis aus Gl. (3.4) entspricht. Die anderen Fälle können analog überprüft werden.

Übungsaufgabe 3.2: Alice' Münze erraten

Problem: Alice ist im Besitz von drei Münzen u, q, r mit den folgenden Verteilungen:

$$u = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sie führt nun die folgende Sequenz von Würfen durch:

1. Sie wirft die Münze u.
2. Je nach Ergebnis wirft sie eine der anderen beiden Münzen:
   (0) wenn u das Ergebnis 0 hatte, wirft sie q;
   (1) wenn u das Ergebnis 1 hatte, wirft sie r.
3. Alice erzählt Bob das Ergebnis (0 oder 1) des zweiten Münzwurfs (aber nicht, ob es das Ergebnis von q oder r ist).

Diese Situation besteht aus *zwei* probabilistischen Bits: Alice' erster Münzwurf und Alice' zweiter Münzwurf (der auch Bob's probabilistischem Bit entspricht).

Fragen:

1. Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Würfe von Alice?
2. Was ist die Verteilung, wenn Bob sein probabilistisches Bit misst?
3. Wenn Bob sein Bit misst und als Ergebnis 0 erhält, ist es dann wahrscheinlicher, dass erste Münze 0 oder 1 war? Was wenn er 1 misst?

3.1.5 Die SWAP-Operation

Wir wissen bereits, wie man einzelne probabilistischen Bits manipuliert und wollen natürlich auf mehreren probabilistischen Bits gleichzeitig Operationen anwenden. Eine der einfachsten Zwei-Bit Operationen ist die SWAP-Operation, die zwei Bits vertauscht:

$$\begin{aligned} \text{SWAP}\,[00] &= [00], \\ \text{SWAP}\,[01] &= [10], \\ \text{SWAP}\,[10] &= [01], \\ \text{SWAP}\,[11] &= [11]. \end{aligned}$$

SWAP vertauscht also sozusagen die beiden Zustände $[01]$ und $[10]$ miteinander und lässt die anderen beiden unberührt. Die obenstehenden Gleichungen können also so zusammengefasst werden:

$$\text{SWAP}\,[a, b] = [b, a], \tag{3.17}$$

für alle $a, b \in \{0, 1\}$, wobei das Komma die die beiden Bits voneinander trennt. Wie sonst auch, können wir SWAP auch durch Linearität auf probabilistische Bits erweitern:

$$\begin{aligned} &\text{SWAP}\,\left(p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]\right) \\ &\quad = p_{00}[00] + p_{01}[10] + p_{10}[01] + p_{11}[11] \\ &\quad = p_{00}[00] + p_{10}[01] + p_{01}[10] + p_{11}[11]. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 3.3: SWAP in der 4-Vektorschreibweise (optional)

Schreibe die SWAP-Operation auf zwei probabilistischen Bits in der 4-Vektorschreibweise.

3.1.6 Die kontrollierte-NOT-Operation

NOT und SWAP kann man nutzen, um einzelne Bits und deren Reihenfolge zu ändern. Die Bits interagieren dabei aber nicht miteinander. Um sinnvolle Algorithmen zu Bauen brauchen wir eine Operation, die ein Bit in Abhängigkeit eines anderen verändert. Die CNOT-Operation, oder auch kontrollierte-NOT (engl. *controlled-NOT*), ist die einfachste Operation, die genau das macht. Sie flippt das Zielbit (engl. *target*) genau dann, wenn das Steuerbit (engl. *control*) auf 1 gesetzt ist.

Wenn das erste Bit das Steuer- und das zweite das Zielbit ist, schreiben wir $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[00] &= [00], \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[01] &= [01], \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[10] &= [11], \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[11] &= [10]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Das entspricht also einem vertauschen der beiden strings $[10]$ und $[11]$ während die anderen beiden unverändert bleiben.

Man kann sich $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ auch als Addition vorstellen: die beiden bits werden aufaddiert (modulo 2) und das Ergebnis wird im zweiten Bit gespeichert. Das lässt sich so zusammenfassen:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,[a,b] = [a, a\oplus b], \tag{3.19}$$

für jedes $a, b \in \{0,1\}$ wobei "$\oplus$" die *Addition modulo* 2 darstellt und das Komma die beiden Bits trennt. Die Addition modulo 2 funktioniert wie folgt:

$$0\oplus 0 = 1\oplus 1 = 0, \qquad 0\oplus 1 = 1\oplus 0 = 1. \tag{3.20}$$

Manchmal nennt man "$\oplus$" auch XOR oder exklusives Oder (engl. *exclusive or*), also "entweder-oder", da das Ergebnis nur dann 1 ist, wenn genau eins der beiden Bits 1 ist. Wie üblich kann man $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ durch Linearität von deterministischen Bits auf probabilistische erweitern.

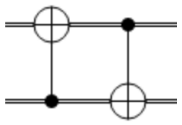
Wir werden auch kontrollierte-NOT Operationen sehen, bei denen das *zweite* Bit das Steuer- und das erste das *erste* das Zielbit ist. Analog schreiben wir diese Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$.

Übungsaufgabe 3.4: Steuer- und Zielbit vertauschen

1. Schreibe die Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ in einer Formel wie in Gl. (3.19).
2. Wie kann man $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ durch SWAP und $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ implementieren?

Du kannst eine kontrollierte-NOT-Operation in QUIRKY hinzufügen, indem du zunächst die [•] Box auf dein Steuerbit ziehst. Danach ziehst du die [⊕] Box auf den Draht, der dem Zielbit entsprechen soll. Wenn alles klappt, verbinden sich die beiden Boxen und du hast erfolgreich eine kontrollierte-NOT-Operation erstellt. Hast du zum Beispiel das untere Bit als Steuer- und das obere als Zielbit ausgewählt, solltest du folgendes Ergebnis erhalten:

Da das untere (!) Bit das erste, und das obere das zweite Bit ist, entspricht diese Abbildung der CNOT1 $\to$ 2-Operation. Hier siehst du ein komplexeres Beispiel, in dem zunächst $\text{CNOT}_{1\to 2}$ und anschließend $\text{CNOT}_{2\to 1}$ angewendet wird:



Hausaufgabe 3.2: SWAP aus CNOT's

Problem: Es ist beinahe Mitternacht, aber Bob bastelt immer noch an dem Prototypen seines probabilistischen-Bit Computers herum, den er am nächsten Tag in der Schule vorstellen will. Er ist so beschäftigt damit, seinen Zufallszahlengenerator zu kalibreren, dass er vergisst seinen Papageien Ziggy zu füttern. Um auf sich aufmerksam zu machen, stößt Ziggy Bob's Kaffetasse um und der ganze Kaffe fließt über Bob's selbstgebastelte Tastatur, mit der er Operationen auslösen kann. Entsetzt stellt Bob fest, dass die SWAP-Taste nicht mehr funktioniert! Zum Glück ist es der CNOT-Taste besser ergangen, sie funktioniert noch immer.

Fragen: Wie kann Bob die SWAP-Operation nur durch CNOT-Operationen implementieren? (Wenn du zeigen willst, dass zwei Operationen identisch sind, musst du das dank Linearität nur für die Basiszustände zeigen.)

Hinweis: Du solltest drei CNOT-Operationen benötigen.

3.1.7 Produkt-Verteilungen

Lass uns nun noch näher anschauen, wie man Zwei-Bit-Systeme aus zwei einzelnen Bits erhält. Nehmen wir einmal an, wir haben die beiden probabilistischen Bits $q = q_0[0] + q_1[1]$ und $r = r_0[0] + r_1[1]$ gegeben. Wie können wir diese beiden zu einem Zwei-Bit-System zusammenführen? Bisher haben wir uns diese Frage zwar noch nicht explizit gestellt, allerdings haben wir in §1.1.1 schon gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse gleichzeitig auftreten, durch das Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten gegeben ist. So ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bits q und r im Zustand $[00]$ sind q_0r_0. Genauso ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Zustand $[01]$ sind q_0r_1. Wenn wir also uns alle vier Wahrscheinlichkeiten anschauen, erhalten wir

$$q_0r_0[00] + q_0r_1[01] + q_1r_0[10] + q_1r_1[11]. \tag{3.21}$$

Mit anderen Worten sind die vier Wahrscheinlichkeiten p_{ab} des kombinierten Zustands

$$p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

durch die folgende Gleichung gegeben:

$$p_{ab} = q_a r_b. \tag{3.22}$$

Du kannst einmal kontrollieren, dass die Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse wenn du das erste Bit misst durch q und die Wahrscheinlichkeiten fürs zweite durch r gegeben sind (dafür kannst du die Regel aus Abb. 3.2 und $r_0 + r_1 = 1$ sowie $q_0 + q_1 = 1$ nutzen). Der Zwei-Bit Zustand hat allerdings eine besondere Eigenschaft: die beiden Bits sind unabhängig

(engl. *independent*) voneinander. Das bedeutet, dass du beim messen eines der beiden Bits keine Information über das andere Bit erhältst. In der folgenden Übung kannst du das mal selbst ausprobieren:

Übungsaufgabe 3.5: Unabhängige Bits (optional)

Nimm an, dass wir das erste Bit aus dem Zustand Gl. (3.21) messen und das Ergebnis als $a \in \{0, 1\}$ bezeichnen. Zeige, dass der Zustand des zweiten Bit r ist, unabhängig vom Ergebnis a des ersten Bits. Mit anderen Worten, die beiden Bits zu kombinieren und das erste Bit zu messen hat den Zustand des zweiten nicht beeinflusst (was es auch nicht sollte)!

Für diese besondere Struktur führen wir eine Notation ein. Und zwar benutzen wir das Symbol "$\otimes$", wenn wir zwei probabilistische Bits zu einem einzelnen System aus zwei Bits kombinieren wollen:

$$q \otimes r = \big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big) \tag{3.23}$$

Das Symbol "$\otimes$" heißt Tensorprodukt oder auch *Kronecker-Produkt*. Wie können wir also diese seltsame Notation in eine Verteilung von zwei Bits wie in Gl. (3.21) umwandeln? Zunächst stellen wir fest, dass die Operation "$\otimes$" auf deterministischen Bits einfach ein aneinanderreihen (auch "konkatenieren") der Zeichenkette ist. Zum Beispiel gilt

$$[0] \otimes [1] = [01]. \tag{3.24}$$

Das ergibt Sinn, da ein Bit im Zustand $[0]$ und ein anderes Bit im Zustand $[1]$ zu haben das gleiche ist, wie zwei Bits im Zustand $[01]$. Wie immer können wir die uns gut bekannte Linearität um Hilfe bitten, wenn wir diese Regel auf probabilistische Bits erweitern wollen. Durch Linearität können wir beide Terme aus Gl. (3.23) erweitern und anschließend die Konkatenationsregel aus Gl. (3.24) anwenden:

$$\begin{aligned}
&\big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big) \\
&= q_0 r_0 \big([0] \otimes [0]\big) + q_0 r_1 \big([0] \otimes [1]\big) + q_1 r_0 \big([1] \otimes [0]\big) + q_1 r_1 \big([1] \otimes [1]\big) \\
&= q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11].
\end{aligned}$$

Beachte, dass wir wieder die Verteilung aus Gl. (3.21) erhalten haben. Mit anderen Worten, wir haben gezeigt, dass die beiden Gleichungen (3.23) und (3.21) identisch sind:

$$\big(q_0[0] + q_1[1]\big) \otimes \big(r_0[0] + r_1[1]\big) = q_0 r_0 [00] + q_0 r_1 [01] + q_1 r_0 [10] + q_1 r_1 [11]. \tag{3.25}$$

Das bedeutet, dass wir die "$\otimes$"-Operation tatsächlich konsistent zu unseren vorherigen Überlegungen ist, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zwei-Bit-Systems durch multiplizieren der Einzelwahrscheinlichkeiten gebildet wird, siehe Gl. (3.22).

Beachte, dass Gl. (3.25) dem Distributivgesetz für Addition und Multiplikation stark ähnelt:

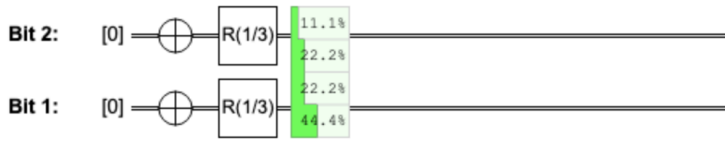
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Der einzige Unterschied ist, dass wir anstelle von Zahlen nun Vektoren und anstelle der Multiplikation die Konkatenationsregel $[a] \otimes [b] = [a, b]$ nutzen. Wichtig ist jedoch, dass die Reihenfolge der Argumente bei der Konkatenation wichtig ist, während bei der Multiplikation in den meisten Fällen das Kommutativgesetz gilt. Im Allgemeinen ist also $[a, b] \neq [b, a]$, da $[a]$ und $[b]$ zu konkatenieren nicht das gleiche ist wie $[b]$ und $[a]$ zu konkatenieren. Du kannst das übrigens mithilfe der Vektornotation überprüfen, indem du das Tensorprodukt wie folgt schreibst:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ q_1 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 r_0 \\ q_0 r_1 \\ q_1 r_0 \\ q_1 r_1 \end{pmatrix},$$

wobei der zweite Ausdruck ein sogenannter Blockvektor ist, dessen beide Einträge jeweils selbst Vektoren sind.

Das Tensorprodukt liefert einen schnellen Weg, um zu verstehen, was im Schaltkreis (3.12) passiert, den wir hier noch einmal wiederholen:



Beachte, dass beide Zustände unabhängig voneinander in den Zustand $\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]$ gebracht werden. Daher ist der kombinierte Zustand beider Bits

$$\left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) \otimes \left(\frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1]\right) = \frac{1}{9}[00] + \frac{2}{9}[01] + \frac{2}{9}[10] + \frac{4}{9}[11] = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11.1\% \\ 22.2\% \\ 22.2\% \\ 44.4\% \end{pmatrix},$$

was mit dem Ergebnis von QUIRKY übereinstimmt.

Hausaufgabe 3.3: Das Tensorprodukt

Finde zwei probabilistische Bits q und r, sodass folgende Gleichung gilt:

$$q \otimes r = 0.48[00] + 0.32[01] + 0.12[10] + 0.08[11].$$

Das Tensorprodukt erlaubt ns auch kompaktere Schreibweisen für lokale Operationen zu nutzen. So gilt wenn M eine Operation auf einem Bit ist, dass

$$M_1([a] \otimes [b]) = M[a] \otimes [b], \qquad M_2([a] \otimes [b]) = [a] \otimes M[b]. \tag{3.26}$$

Das stimmt mit den Gleichungen aus §3.1.2 überein.

Da die oben beschriebenen Zwei-Bit-Verteilungen durch ein Produkt von zwei Ein-Bit-Zuständen $p = q \otimes r$ entstanden sind, heißen sie Produktzustände oder Produkt-Verteilungen. Wie du in Übungsaufgabe 3.5 gesehen hast, modellieren Produktzustände Situationen, in denen zwei Bits unabhängig voneinander sind, zum Beispiel wen zwei Münzen geworfen werden. Aber, ist jeder Zwei-Bit-Zustand ein Produktzustand? Interessanterweise werden wir im nächsten Abschnitt sehen, dass dies nicht der Fall ist.

3.1.8 Korrelierte Verteilungen

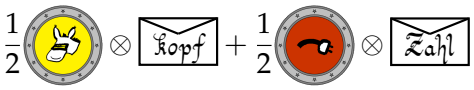
Manche Zwei-Bit-Verteilungen sind *nicht* Produktzustände – sie können nicht wie in Gl. (3.21) oder Gl. (3.23) geschrieben werden, egal welche Werte du für q_a und r_b wählst. Wir werden eine Verteilung korreliert nennen, wenn sie keine Produktverteilung ist. Ein Beispiel einer korrelierten Verteilung ist

$$\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]. \tag{3.27}$$

Wir können zeigen, dass dieser Zustand kein Produktzustand ist, indem wir annehmen, wir haben eines der beiden Bits gemessen. Das Ergebnis a dieser Messung ist komplett zufällig, also entweder 0 oder 1 mit jeweils 50%. Aber sobald wir a kennen, ist der Zustand des anderen Bits deterministisch – es zu messen würde mit 100% das gleiche Ergebnis liefern. Also ist der Zustand des Bits $b = a$, hängt also vom Messergebnis a des gemessenen Bits abhängig. In Übungsaufgabe 3.5 haben wir gesehen, dass das bei Produktzuständen nicht passieren kann.

Damit haben wir bewiesen, dass Gl. (3.27) einen korrelierten Zustand beschreibt. Tatsächlich sind die beiden Bits sogar *perfekt* korreliert, da die Messergebnisse zwar zufällig, aber immer identisch sind ($a = b$). Aufgrund dieser Eigenschaft nennen wir Gl. (3.27) ein Paar perfekt korrelierter Zufallsbits.

Korrelierte Verteilungen entstehen auf natürliche Weise durch eine Art von Interaktion. Nimm zum Beispiel an, du wirfst eine Münze und schreibst das Ergebnis auf einen Zettel, den du in einem Briefumschlag verschließt und einer anderen Person gibst. Aus der Sicht der anderen Person (die zwar deine Vorgehensweise, nicht aber das Ergebnis des Münzwurfs kennt) lässt sich der Zustand deiner Münze (Bit 1) und des Papiers im Umschlag (Bit 2) durch



beschreiben, was nichts anderes als eine unterhaltsame Schreibweise des Zustands in Gl. (3.27) ist.

Wie können wir also in QUIRKY korrelierte Zustände herstellen? Lokale Operationen alleine reichen nicht aus, da diese nur zu Produktzuständen führen. Wir können aber die kontrollierte-NOT-Operation nutzen, um die zwei Bits im folgenden Schaltkreis interagieren zu lassen:

Warum funktioniert das?

Übungsaufgabe 3.6: Perfekt korrelierte Zufallsbits generieren

Erkläre, warum die obige Berechnung in QUIRKY den Zustand $\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]$ generiert.

Wenn du prüfen willst, ob eine beliebige Zwei-Bit-Verteilung

$$p = p_{00}[00] + p_{01}[01] + p_{10}[10] + p_{11}[11]$$

einem Produkt- oder korreliertem Zustand entspricht, kannst du einfach das folgende Maß berechnen:

$$\Delta(p) = p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10}. \tag{3.28}$$

Wenn $\Delta(p) = 0$, dann ist p ein Produktzustand; anderenfalls ist es eine korrelierte Verteilung. Zum Beispiel gilt für den Zustand aus Gl. (3.27):

$$\Delta\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11]\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 0\cdot 0 = \frac{1}{4} \neq 0,$$

was bestätigt, dass dieser Zustand tatsächlich korreliert ist und keine Produktverteilung. Wenn du jetzt neugierig bist und wissen willst, wieso diese Bedingung korrekt ist, findest du die Erklärung unterhalb. Da sie aber nicht unbedingt erforderlich für das Verständnis ist, kannst du sie auch überspringen.

Wir können den Beweis, dass $\Delta(p) = 0$ genau dann, wenn p ein Produktzustand ist, in zwei Schritte unterteilen. Zunächst zeigen wir, dass wenn p ein Produktzustand ist, $\Delta(p) = 0$ gelten muss. Wenn $p = q \otimes r$ ist, gilt tatsächlich

$$\Delta(p) = q_0 r_0 q_1 r_1 - q_0 r_1 q_1 r_0 = 0.$$

Aber was ist mit der Umkehrung – könnte $\Delta(p) = 0$ sein, auch wenn p *kein* Produktzustand ist? Nein, das ist nicht möglich! Um das zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $\Delta(p) = 0$ ist und

zeigen, dass dadurch $p = q \otimes r$, wobei q, r probabilistische Bits sind. Wir wählen die Bits wie folgt:

$$\begin{aligned} q &= q_0[0] + q_1[1] = (p_{00} + p_{01})[0] + (p_{10} + p_{11})[1], \\ r &= r_0[0] + r_1[1] = (p_{00} + p_{10})[0] + (p_{01} + p_{11})[1]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Aus Abb. 3.3 geht hervor, dass q und r einfach die Verteilung der Messergebnisse sind, wenn wir jeweils das erste oder zweite Bit messen. Nun können wir überprüfen, dass unsere Wahl von q und r tatsächlich den Zustand p produziert:

$$\begin{aligned} q \otimes r &= \big((p_{00} + p_{01})[0] + (p_{10} + p_{11})[1]\big) \otimes \big((p_{00} + p_{10})[0] + (p_{01} + p_{11})[1]\big) \\ &= (p_{00} + p_{01})(p_{00} + p_{10})[00] + \cdots \\ &= (p_{00}p_{00} + p_{00}p_{10} + p_{01}p_{00} + \boldsymbol{p_{01}p_{10}})[00] + \cdots \\ &= (p_{00}p_{00} + p_{00}p_{10} + p_{01}p_{00} + \boldsymbol{p_{00}p_{11}})[00] + \cdots \\ &= p_{00}(p_{00} + p_{10} + p_{01} + p_{11})[00] + \cdots \\ &= p_{00}[00] + \cdots \\ &= p. \end{aligned}$$

Hier haben wir zunächst Gl. (3.25) verwendet, dann ausmultipliziert, anschließend ausgenutzt, dass $\Delta(p) = 0$ gilt und somit $\boldsymbol{p_{01}p_{10}}$ durch $\boldsymbol{p_{00}p_{11}}$ ersetzt werden kann (siehe Gl. (3.28)). Und zum Schluss haben wir $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$ zusammengefasst, da p eine Wahrscheinlichkeitsverteilung sein muss. Die drei als "…" abgekürzten Terme können analog behandelt werden. Kannst du die Lücken selbst füllen und einen der Terme alleine verifizieren?

Wir haben bereits in Übungsaufgabe 3.5 gesehen, dass p kein Produktzustand sein kann, wenn die Messung des ersten Bits den Zustand des zweiten Bits "stört". Tatsächlich gilt auch die Umkehrung dieser Aussage, wie du in der folgenden Hausaufgabe beweisen kannst.

Hausaufgabe 3.4: Unabhängigkeit impliziert Produkt (optional)

Nimm an, dass p sich in einer beliebigen Zwei-Bit-Verteilung befindet, sodass der Zustand des zweiten Bits unabhängig vom Messergebnis des ersten Bit ist. Zeige, dass ein solches p eine Produktverteilung ist. Das schaffst du in zwei Schritten:

1. Das Messergebnis des ersten Bits kann entweder 0 oder 1 sein. Mit Abb. 3.3 kannst du die verbleibenden Zustände des zweiten Bits in beiden Fällen vergleichen und die folgenden Identitäten zeigen:

$$\frac{p_{00}}{p_{00} + p_{01}} = \frac{p_{10}}{p_{10} + p_{11}}, \qquad \frac{p_{01}}{p_{00} + p_{01}} = \frac{p_{11}}{p_{10} + p_{11}}.$$

2. Nutze diese Gleichungen sowie Gl. (3.28), um zu zeigen, dass $\Delta(p) = 0$

3.2 Zwei Quantenbits

Wir können zwei Quantenbits ähnlich wie zwei probabilistische Bits beschreiben. Der größte Unterschied liegt wieder darin, dass wir mit Amplituden anstelle von Wahrscheinlichkeiten arbeiten, wobei diese wieder negativ sein können und anders normalisiert werden (siehe §2.1.1). Ein allgemeiner Zwei-Qubit-Zustand sieht dann so aus:

$$|\psi\rangle = \psi_{00}\,|00\rangle + \psi_{01}\,|01\rangle + \psi_{10}\,|10\rangle + \psi_{11}\,|11\rangle \tag{3.30}$$

wobei $\psi_{ij} \in [-1, 1]$ und

$$\psi_{00}^2 + \psi_{01}^2 + \psi_{10}^2 + \psi_{11}^2 = 1.$$

Wir schreiben nun $|a,b\rangle$ anstelle von $[a,b]$, um klarzustellen, dass es sich um Quantenbits und nicht probabilistische Bits handelt. Genau wie wir in Gl. (3.3) die Basiszustände von zwei probabilistischen Bits festgestellt haben, können wir die vier Basisvektoren von $|a,b\rangle$ identifizieren:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Genau wie in Gl. (3.1), können wir dann den allgemeinen Zwei-Qubit-Zustand aus Gl. (3.30) auch als 4-Vektor schreiben:

$$\begin{pmatrix}\psi_{00}\\\psi_{01}\\\psi_{10}\\\psi_{11}\end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren werden aber recht schnell unhandlich, weshalb wir hauptsächlich die $|a,b\rangle$ Schreibweise aus Gl. (3.30) verwenden.

Diese Notation vereinfacht auch das Zusammenfassen mehrerer Quantensysteme. In §3.1.7 haben wir das Tensorprodukt „⊗“genutzt, um zwei unabhängige probabilistische Bits zu einem Zwei-Bit-System zu kombinieren. Die gleiche Operation (nur, dass wir $[a]$ durch $|a\rangle$ ersetzen) können wir auch auf Qubits anwenden. Insbesondere können wir die Basisvektoren wieder wie auch schon in Gl. (3.24) zusammensetzen:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle, \qquad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle, \qquad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle, \qquad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle. \tag{3.32}$$

Beachte, dass das dem aneinanderreihen der Zeichenketten entspricht. Das gibt uns eine alternative Möglichkeit, die vier Basisvektoren in Gl. (3.31) zu betrachten.

Wir können das Tensorprodukt wie folgt auf beliebige Ein-Qubit-Zustände $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ und $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ erweitern:

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle &= (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)\\ &= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Zwei-Qubit-Zustände dieser Form nennen wir Produktzustände. In §3.2.3 werden wir sehen, wie man solche Zustände durch Quantenoperationen herstellt. Wichtig ist, dass wie auch bei probabilistischen Bits, nicht alle Zwei-Qubit-Zustände Produktzustände sind.

Übungsaufgabe 3.7: Tensorprodukt und Produktzustände

Erinnere dich an die Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ aus Übungsaufgabe 2.1.

1. Schreibe $|+\rangle \otimes |-\rangle$ in der Form aus Gl. (3.30).
2. Ist der Zustand $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ein Produktzustand?

Im Folgenden werden wir lernen, welche Regeln beim Messen und Manipulieren von zwei Qubits gelten. Zwar sind diese Regeln analog zu den bekannten Regeln von zwei probabilistischen Bits, aber dennoch werden wir neue und unerwartete Phänomene entdecken. Erfreulicherweise hilft uns QUIRKY bei dieser Quest, die Welt der Zwei-Qubit-Systeme zu erkunden. Um zu starten, besuche

https://www.quantum-quest.org/quirky

und klicke auf “Quest 3” und anschließend auf “Two Qubits”. Dein Browser sollte dann in etwa wie in Abb. 3.4 aussehen. Im Vergleich zu letzter Woche hat QUIRKY zwei *Quantenbits* die im Zustand $|00\rangle$ starten. Außerdem gibt es drei neue Boxen in der Toolbox: $\boxed{Z}$, $\boxed{H}$, und $\boxed{\bullet}$ (außerdem fehlt die Mysteriöse Box). Im Laufe dieses Kapitels werden wir diese Operationen besprechen.

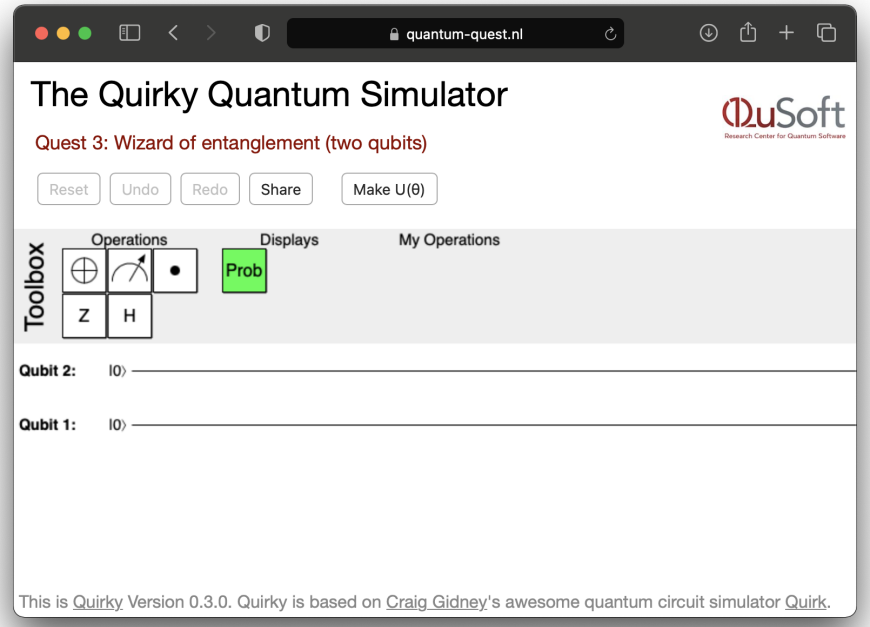
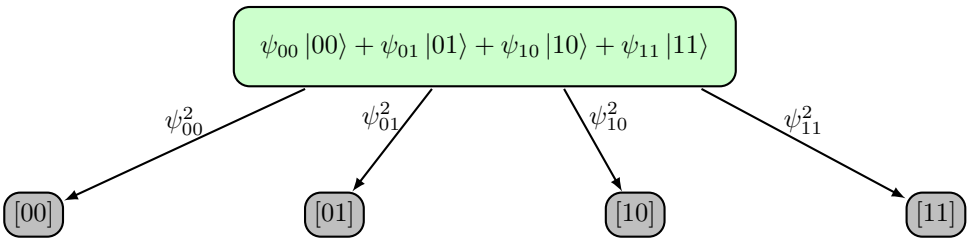


Abbildung 3.4: QUIRKY für Quest 3.

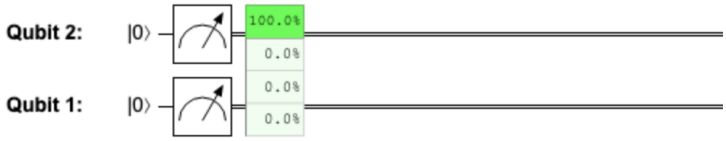
3.2.1 Zwei Qubits messen

Das Messen von zwei Qubits ist sehr ähnlich definiert zu dem von einem Qubit (s. Gl. (2.7)). Der Unterschied besteht darin, dass man zwei Bits erhält mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:



(3.34)

Hier bezeichnet der grün hinterlegte Teil die Qubits und der grau hinterlegte Teil die resultierenden deterministischen Bits, die wir nach dem Messen erhalten. Wie können wir beide Qubits in QUIRKY messen? Wir führen einfach auf jedem Qubit eine Messung durch und benutzen die Anzeige zur Wahrscheinlichkeit wie zuvor.



3.2.2 Lokale Operationen

Wenn du zwei Qubits hast, führt eine *lokale Operation* nur zu Veränderungen auf einem der Qubits. Jede Operation, die man auf einem Qubit ausführen kann, kann man als lokale Operation betrachten, die auf zwei Qubits operiert, so wie wir dies schon in §3.1.2 getan haben. Erinnern wir uns beispielsweise an die Ein-Bit-NOT-Operation von Gl. (1.9), die wir in lokale NOT Operationen in Gl. (3.6) und (3.7) umgewandelt haben, so können wir dieses analog für die Ein-Qubit-NOT-Operation machen. Die resultierenden lokalen Quantum NOT-Operationen

sehen sehr ähnlich aus:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NOT}_1 \left|00\right\rangle = \left|10\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_1 \left|01\right\rangle = \left|11\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_1 \left|10\right\rangle = \left|00\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_1 \left|11\right\rangle = \left|01\right\rangle, \\
&\mathrm{NOT}_2 \left|00\right\rangle = \left|01\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_2 \left|01\right\rangle = \left|00\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_2 \left|10\right\rangle = \left|11\right\rangle, \quad \mathrm{NOT}_2 \left|11\right\rangle = \left|10\right\rangle.
\end{aligned}$$

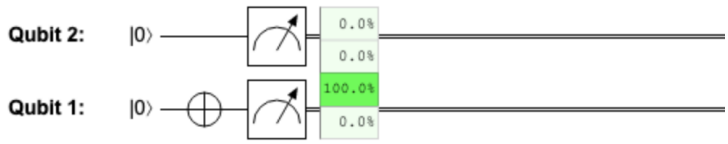
Der einzige Unterschied ist, dass wir die Bit-Notation $[ab]$ durch die Qubit-Notation $|ab\rangle$ ersetzt haben.

Schauen wir uns nun eine Anwendung an: Nehmen wir an, wir wollen aus $|00\rangle$ alle möglichen Zwei-Qubit Basiszustände bilden. Dies kann durch NOT-Operationen getan werden:

$$\left|00\right\rangle = \left|00\right\rangle, \quad \left|01\right\rangle = \mathrm{NOT}_2 \left|00\right\rangle, \quad \left|10\right\rangle = \mathrm{NOT}_1 \left|00\right\rangle, \quad \left|11\right\rangle = \mathrm{NOT}_2\, \mathrm{NOT}_1 \left|00\right\rangle.$$

Beachte, dass wir im letzten Fall die NOT-Operationen in umgekehrter Reihenfolge hätten durchführen können, weil beide Sequenzen beide Bits negieren.

Um eine lokale Operation in QUIRKY durchzuführen, platzieren wir die entsprechende Box auf entweder den ersten oder den zweiten Draht. Zum Beispiel führt die folgende Sequenz zum Zustand $|10\rangle$ und zeigt die Messwahrscheinlichkeiten, wenn man beide Qubits misst:



Dies ergibt Sinn, da der untere Draht in QUIRKY dem ersten Qubit entspricht.

Dies kann man am Besten mit der Tensorprodukt-Notation aus Gl. (3.33) und Linearität darstellen. Wenn U eine beliebige Ein-Qubit Operation ist, dann können wir U_1 definieren als die Zwei-Qubit Operation, die auf jedem Basisvektor $|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ (wobei $a, b \in \{0,1\}$) wie folgt definiert ist:

$$U_1 \left|a,b\right\rangle = U\left|a\right\rangle \otimes \left|b\right\rangle. \tag{3.35}$$

Die rechte Seite bedeutet $(U|a\rangle) \otimes |b\rangle$, sprich das Tensorprodukt von den beiden Zuständen $U\left|a\right\rangle$ und $|b\rangle$. Dies ist intuitiv, da wir einfach U nur auf das erste Qubit anwenden und das zweite Qubit unverändert lassen.

Um U_1 auf einen beliebigen Zwei-Qubit Zustand anzuwenden, erweitern wir diese Vorschrift mittels *Linearität*. Wie in der ersten Woche bedeutet dies, dass wir erst $|\psi\rangle$ erweitern wie in Gl. (3.30) und dann die Operation auf jeden Basisvektor anwenden. Dies ergibt also

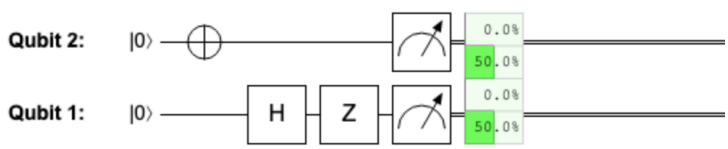
$$U_1 \left|\psi\right\rangle = \psi_{00}\, U_1 \left|00\right\rangle + \psi_{01}\, U_1 \left|01\right\rangle + \psi_{10}\, U_1 \left|10\right\rangle + \psi_{11}\, U_1 \left|11\right\rangle$$

Jetzt können wir Gl. (3.35) auf jeden der vier Terme anwenden. Wir definieren U_2 analog:

$$U_2 \left|a,b\right\rangle = \left|a\right\rangle \otimes U\left|b\right\rangle \tag{3.36}$$

und erweitern es mittels Linearität. Dies ist analog zu den Formeln in Gl. (3.26) für gewöhnliche Bits.

Zusätzlich zur NOT-Operation sind zwei wichtige Quantum Operationen, die wir ständig benutzen, die Z-Operation aus Gl. (2.12) und die Hadamard-Operation aus Gl. (2.20). Da beide so wichtig sind, haben wir ihnen ihre eigenen Boxen in QUIRKY gegeben, nämlich $\boxed{Z}$ und $\boxed{H}$.



(3.37)

Welchen Zustand erhalten wir hierdurch? Der mathematische Ausdruck für den Zustand ist

$$Z_1 H_1 \mathrm{NOT}_2 \left|00\right\rangle . \tag{3.38}$$

Beachte, dass im Unterschied zur graphischen Beschreibung (3.37) sich der Eingabezustand $|00\rangle$ in dieser Ausdrucksform auf der rechten Seite befindet. Dies führt dazu, dass die Reihenfolge der Operationen in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Jedoch beschreiben sowohl (3.37) als auch Gl. (3.38) den gleichen Prozess – die erste Operation, die wir anwenden auf $|00\rangle$ ist NOT_2, dann H_1 und schlussendlich Z_1. Der einzige Unterschied zwischen (3.37) und Gl. (3.38) ist die Vereinbarung, wie wir den Zeitverlauf darstellen: Er geht von links nach rechts in (3.37) und von rechts nach links in Gl. (3.38). Leider sind diese beiden abweichenden Konventionen Standard im Quantum Computing, wir können also nichts dagegen tun. Du musst also sorgfältig sein, wenn du QUIRKY Bilder in Gleichung übersetzt und umgekehrt!

Übungsaufgabe 3.8: Ist QUIRKY korrekt?

Berechne den Zwei-Qubit Zustand in Gl. (3.38) (also den Zustand direkt vor dem Messen in (3.37)). Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Messergebnisse und vergleiche deine Ergebnisse mit QUIRKY.

Letzte Woche haben wir in §2.4.3 besprochen, dass jegliche Operation auf einem einzelnen Qubit entweder eine Rotation $U(\theta)$ oder eine Spiegelung $V(\theta) = \mathrm{NOT}\, U(\theta)$ ist. Da wir beliebige Rotationen in QUIRKY (s. §2.4.1) konstruieren können, können wir also beliebige lokale Operationen auf beiden Qubits ausführen mittels QUIRKY.

Es ist sogar so, dass die Regeln von Gl. (3.35) und (3.36) nicht nur auf Basisvektoren funktionieren, sondern sogar auf beliebigen Produktzuständen. Sprich, wenn $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ beliebige einzelne Qubit-Zustände sind, dann gilt

$$U_1 \left(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\right) = U|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle , \tag{3.39}$$
$$U_2 \left(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\right) = |\alpha\rangle \otimes U|\beta\rangle . \tag{3.40}$$

Übungsaufgabe 3.9: Lokale Operationen auf Produktzuständen (optional)

Kannst du Gl. (3.39) oder (3.40) nachweisen?

3.2.3 Parallele Operationen

Wenn wir eine Operation auf das erste Qubit anwenden und eine zweite Operation auf das zweite Qubit, dann ist die Reihenfolge der beiden Operationen egal. Das heißt, wenn U und V beliebige Operationen auf einem Qubit sind, dann gilt

$$U_1 V_2 = V_2 U_1 . \tag{3.41}$$

Wir können diesen intuitiven Fakt beweisen, indem wir Gl. (3.39) und (3.40) benutzen. Für jeden Basiszustand $|a, b\rangle$, wobei $a, b \in \{0, 1\}$, gilt

$$U_1 V_2 |a, b\rangle = U_1 \left(|a\rangle \otimes V|b\rangle\right) = U|a\rangle \otimes V|b\rangle = V_2 \left(U|a\rangle \otimes |b\rangle\right) = V_2 U_1 |a, b\rangle ,$$

Gl. (3.41) folgt durch Linearität.

Dadurch, dass die beiden Operationen auf unterschiedlichen Qubits ausgeführt werden können, können wir sie sogar parallel ausführen! Dies legt nahe, eine neue Notation für die Operation in Gl. (3.41) einzuführen:

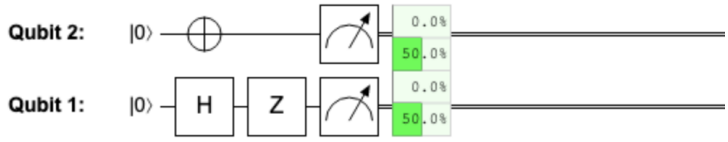
$$U \otimes V .$$

Wir verwenden erneut das Symbol für das Tensorprodukt, welches wir ursprünglich dafür verwendet hatten um zwei unabhängige Ein-Qubit Zustände in einen Zwei-Qubit Zustand zusammenzuführen. Die gleiche Bedeutung erweitert sich auch auf Quantenoperationen: $U \otimes V$ bezeichnet die kombinierte Operation, die daraus besteht U und V auf zwei Untersystem von einem größeren System anzuwenden. Diese Notation ist besonders praktisch, da sie im Zusammenspiel mit dem ursprünglichen Tensorprodukt für Zustände ist:

$$(U \otimes V)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = U|\alpha\rangle \otimes V|\beta\rangle\,. \tag{3.42}$$

Diese Gleichung sagt lediglich Folgendes aus: Wenn man zwei unabhängige Zustände hat und dann eine Operation ausführt, welche unabhängig auf beiden Zuständen wirkt, dann führt man lediglich beide Operationen unabhängig auf den entsprechenden Zuständen aus. Wir nennen $U \otimes V$ das Tensorprodukt von zwei Quantenoperationen oder eine Paralleloperation.

QUIRKY erlaubt es uns, lokale Quantenoperationen parallel auszuführen. Zum Beispiel hätten wir die Sequenz von Operationen in Gl. (3.37) schreiben können als

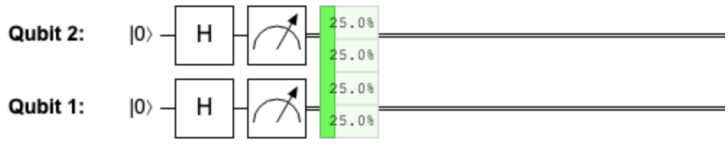


wo die NOT-Operation und die Hadamard-Operation nun parallel ausgeführt werden.

Diskutieren wir ein weiteres Beispiel. Was passiert, wenn wir H auf beide Qubits anwenden? Diese Operation bezeichnen wir als $H \otimes H$ und nach Gl. (2.20) und (3.42) gilt:

$$\begin{aligned}(H \otimes H)|00\rangle &= (H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).\end{aligned}$$

Der resultierende Zustand wird uniforme Superposition auf den beiden Qubits genannt, da dieser Zustand jeden Zwei-Qubit Basiszustand mit gleicher Amplitude enthält. Wenn wir eine Messung auf diesem Zustand durchführen, erhalten wir alle vier Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Wir können dies bestätigen mittels QUIRKY:



Übungsaufgabe 3.10: Einen Produktzustand konstruieren

1. Schreibe $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$ als Tensorprodukt von zwei Ein-Qubit Zuständen.
2. Wie kannst du diesen Zustand konstruieren, indem du eine Sequenz von lokalen Operationen auf $|00\rangle$ anwendest?
3. Implementiere die Sequenz von Operation aus Schritt 2 in QUIRKY.

Gl. (3.42) zeigt, dass, wenn wir eine Paralleloperation auf einen Produktzustand anwenden, wir einen weiteren Produktzustand erhalten.

Hausaufgabe 3.5: Produktzustände von Paralleloperationen

Zeige, dass jeder Produktzustand konstruiert werden kann, indem man parallele Quantenrotationen (sprich, eine Operation der Form $U(\theta) \otimes U(\phi)$) auf den Zustand $|00\rangle$ anwendet.

Hinweis: Durch Gl. (2.5) wissen wir, dass ein allgemeiner Ein-Qubit Zustand der Form $|\psi(\theta)\rangle$ ist.

Wir beenden unsere Diskussion über lokale Operationen mit einigen allgemeinen Anmerkungen. Zuerst ist es leicht zu überprüfen, dass

$$(U \otimes V)(U' \otimes V') = UU' \otimes VV', \tag{3.43}$$

für alle vier Ein-Qubit Operationen U, U', V, V'. Kannst du ein Bild malen, was dies visualisiert?

Wir können nun Nutzen machen von der Einheitsmatrix I von Gl. (2.18), welche $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$ erfüllt (dies lässt sich trivialerweise erweitern als I_1 und I_2 auf zwei Qubits). Diese Matrix ist nutzlos, wenn man sie alleine benutzt, da sie nichts verändert. Sie kann aber von Nutzen sein, wenn man die Tensorproduktnotation verwendet. Zum Beispiel erlaubt uns die Operation Folgendes:

$$U_1 = U \otimes I \qquad\qquad V_2 = I \otimes V,$$

welche klarmacht, dass z.B. U_1 die U-Operation auf dem ersten Qubit ausführt und nichts auf dem zweiten Qubit. Zum Beispiel wird die Identität $U_1V_2 = V_2U_1$ von Gl. (3.41) nun

$$(U \otimes I)(I \otimes V) = U \otimes V = (I \otimes V)(U \otimes I) \tag{3.44}$$

was ziemlich intuitiv ist.

Du könntest dich fragen, ob die Reihenfolge der Operationen jemals eine Rolle spielt, wenn wir sie auf dem *gleichen* Qubit anwenden. Betrachten wir zwei Rotationen, dann folgt aus Gl. (2.15), dass ihre Reihenfolge nicht wichtig ist, da

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta + \theta') = U(\theta' + \theta) = U(\theta')U(\theta).$$

Wenn U und V jedoch zwei beliebige Ein-Qubit Operationen (insbesondere, wenn eine davon eine Reflektion ist), dann ist ihre Zusammensetzung generell abhängig von der Reihenfolge (s. Übungsaufgabe 3.11 unten). Das heißt, dass

$$UV \neq VU.$$

Dieses Problem besteht natürlich weiterhin, wenn man ein weiteres Qubit hat, und weiterhin beide Operationen auf dem gleichen Qubit anwendet. Zum Beispiel

$$(U \otimes I)(V \otimes I) = UV \otimes I \neq VU \otimes I = (V \otimes I)(U \otimes I). \tag{3.45}$$

Wir können dies auch schreiben als $U_1V_1 \neq V_1U_1$ (und gleichermaßen wenn wir beide Operationen auf dem zweiten Qubit anwenden).

Um intuitiv den Unterschied zwischen Gl. (3.44) und (3.45) zu verstehen, stell dir vor, dass U anzuwenden „eine Socke anzuziehen“ bedeutet und V „einen Schuh anzuziehen“ bedeutet. Es ist offensichtlich, dass es einen Unterschied macht, wenn man U und V auf den gleichen Fuß anwendet und die Reihenfolge ändert. Jedoch, wenn man U und V auf verschiedene Füße anwendet (sprich, $U \otimes I$ und $I \otimes V$ anwendet), dann ist das Resultat immer gleich, unabhängig von der Reihenfolge der Operationen. Wenn man richtig angezogen sein möchte, sollte man jedoch $(U \otimes U)$ und dann $(V \otimes V)$ anwenden.

Übungsaufgabe 3.11: Die Reihenfolge ist wichtig

Zeige, dass $HZ \neq ZH$.

3.2.4 Kontrollierte Operationen

Um über Produktzustände hinauszugehen, brauchen wir eine Operation, die es uns erlaubt, dass zwei Quantenbits interagieren. Wie zuvor (s. Gl. (2.18) für probabilistische Bits) werden wir eine *kontrollierte NOT-Operation* hierfür werden, welche wir in Analogie zu Gl. (3.18) und (3.19) definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|00\rangle &= |00\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|01\rangle &= |01\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|10\rangle &= |11\rangle\,, \\ \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|11\rangle &= |10\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.46}$$

oder knapper:

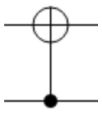
$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = |a, a\oplus b\rangle\,. \tag{3.47}$$

D.h., wenn die Operation $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$ auf Basiszustände angewendet wird, schaltet diese das zweite Qubit um (sprich ändert den Wert von 0 auf 1 und umgekehrt) je nach dem Wert des ersten Qubits. Wir können auch die Operation $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ definieren, welche das zweite Qubit als Kontrollwert nimmt und das erste Qubit als Ziel.

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1}\,|a,b\rangle = |a\oplus b, b\rangle\,. \tag{3.48}$$

Wie immer können wir diese Formeln mittels Linearität auf beliebige Zwei-Qubit Zustände erweitern.

In QUIRKY kannst du eine kontrollierte NOT-Operation für Quantenbits in der gleichen Art und Weise bilden, wie du es bereits für gewöhnliche Bits gelernt hast – siehe §3.1.6, falls du dich nicht erinnerst.



Viele der Dinge, die wir für probabilistische Bits bewiesen haben sind immer noch richtig für Quantenbits. Zum Beispiel erlaubt dir deine Lösung für Hausaufgabe 3.2 auch zwei Qubits zu tauschen! Ein weiteres Beispiel hierfür ist die Tatsache, dass das Ausführen der gleichen kontrollierten NOT-Operation zweimal hintereinander nichts bewirkt. Zum Beispiel ist dies der Fall für $\mathrm{CNOT}_{1\to 2}$, weil

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,\mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a,b\rangle = \mathrm{CNOT}_{1\to 2}\,|a, a\oplus b\rangle = |a, a\oplus a\oplus b\rangle = |a,b\rangle$$

da $a\oplus a = 0$ für jedes $a\in\{0,1\}$. Als Konsequenz daraus, ist die kontrollierte NOT-Operation die Inverse zu sich selbst:

$$\mathrm{CNOT}_{1\to 2}^{-1} = \mathrm{CNOT}_{1\to 2} \tag{3.49}$$

wobei M^{-1} die inverse Operation zu M bezeichnet (s. §2.4.2).

Wenn du ein bisschen mit QUIRKY herumspielst, wirst du vielleicht bereits erkannt haben, dass du [•] mit beliebigen Ein-Qubit Operationen kombinieren kannst, nicht nur mit der NOT-Operation. Tatsächlich können wir die kontrollierte U-Operation für jede Ein-Qubit Operation U definieren. Wir bezeichnen diese als $CU_{1\to 2}$ und $CU_{2\to 1}$, je nachdem welches Qubit

das Kontrollbit und welches das Zielbit ist. Zum Beispiel ist $CU_{1\to 2}$ wie folgt auf den vier Basiszuständen definiert:

$$\begin{aligned} CU_{1\to 2}\,|00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle\,, \\ CU_{1\to 2}\,|01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle\,, \\ CU_{1\to 2}\,|10\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|0\rangle\,, \\ CU_{1\to 2}\,|11\rangle &= |1\rangle \otimes U\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Du kannst leicht überprüfen, dass wir für $U = \text{NOT}$ wieder $\text{CNOT}_{1\to 2}$ erhalten.

3.2.5 Verschränkte Zustände

In Gl. (3.33) haben wir das Tensorprodukt benutzt, um einen Zwei-Qubit Zustand aus zwei Ein-Qubit Zuständen zu basteln. In §3.2.3 haben wir gesehen, dass diese *Produktzustände* genau die gleichen Zustände sind, die wir erhalten, wenn wir lokale Quantenoperationen auf $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ anwenden (was wiederum ein Produktzustand ist). Nun, es existieren auch Zwei-Qubit Zustände, die *nicht* Produktzustände sind. Wir nennen diese Zustände verschränkt und wir werden sehen, dass sie von Bedeutung für Quantum Computing sind.

Wie können wir entscheiden, ob ein Zustand ein Produktzustand ist oder nicht? Obwohl Quantenzustände durch Amplituden und nicht durch Wahrscheinlichkeiten spezifiziert sind, können wir die gleiche Methode benutzen wie in §3.1.8 um zu entscheiden ob eine Wahrscheinlichkeitsverteilung korreliert ist oder nicht. Haben wir einen Zwei-Qubit Zustand der Form (3.30), benutzen wir zuerst Gl. (3.28) um Folgendes zu berechnen:

$$\Delta(|\psi\rangle) = \psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10}. \tag{3.50}$$

Dann ist $|\psi\rangle$ ein Produktzustand genau dann wenn $\Delta(|\psi\rangle) = 0$. Auf diese Weise sind verschränkte Zustände analog zu korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Ein simples aber wichtiges Beispiel eines verschränkten Zwei-Qubit Zustandes ist

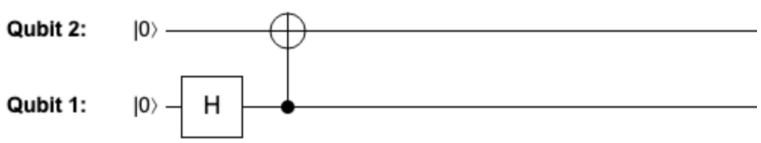
$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\,. \tag{3.51}$$

Dieser Zustand ist analog zu einem Paar perfekt korrelierter zufälliger Bits aus Gl. (3.27). Er ist verschränkt, da

$$\Delta(\left|\Phi^+\right\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\cdot 0 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Wir nennen $|\Phi^+\rangle$ den maximal verschränkten Zustand von zwei Qubits (obwohl weder der Grund für den Namen noch die merkwürdige Notation zu diesem Zeitpunkt klar sind).

Wie können wir verschränkte Zustände bilden? Genau wie wir auch korrelierte Zwei-Bit-Zustände gebildet haben, können wir die kontrollierte NOT-Operation benutzen, um zwei Qubits interagieren zu lassen. Zum Beispiel bereitet die folgende Sequenz von Operationen den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ vor:



Verifizieren wir dies kurz:

$$\text{CNOT}_{1\to 2}\,(H\otimes I)\,|00\rangle = \text{CNOT}_{1\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\,.$$

Beachte, dass die Anwendung von CNOT auf $|00\rangle$ (oder jeglichen anderen Basiszustand) nicht funktioniert hätte (s. Gl. (3.46)).

Hausaufgabe 3.6: Ein weiterer verschränkter Zustand

1. Verifiziere, dass der Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,|01\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|10\rangle$ verschränkt ist.
   Hinweis: Berechne Gl. (3.50).
2. Finde eine Sequenz von Operationen in QUIRKY, die den Zustand $|\psi\rangle$ vorbereitet.
   Hinweis: Du musst möglicherweise eine geeignete Rotation konstruieren.
3. Was sind die Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse, wenn du beide Qubits von $|\psi\rangle$ misst? Benutze QUIRKY um dein Ergebnis zu überprüfen.

Der maximal verschränkte Zustand in Gl. (3.51) ist aus einer Familie von vier Zuständen, die Bell Zustände genannt werden. Die Bell Zustände sind wie folgt definiert:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\,, \tag{3.52}$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\,, \tag{3.53}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle\,, \tag{3.54}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle\,. \tag{3.55}$$

Die Zustände sind nach John Steward Bell benannt, welcher einer der ersten Menschen war, die die außergewöhnlichen Eigenschaften von Quantenverschränkung (engl. *quantum entanglement*) erkannt hat. Wie können wir diese vier Bell Zustände erzeugen? Oben haben wir gesehen, dass wir $|\Phi^+\rangle$ erzeugen können, indem wir die Hadamard- und CNOT-Operation auf den Basiszustand $|00\rangle$ anwenden. Es ist eine einfache Aufgabe zu überprüfen, dass die anderen drei Bell Zustände ähnlich konstruiert werden können, also durch Anwenden der gleichen Operationen auf die anderen drei Basiszustände. Anders gesagt, wenn wir die folgende Operationen definieren:

$$U_{\text{Bell}} = \text{CNOT}_{1\to 2}\,(H\otimes I) \tag{3.56}$$

dann

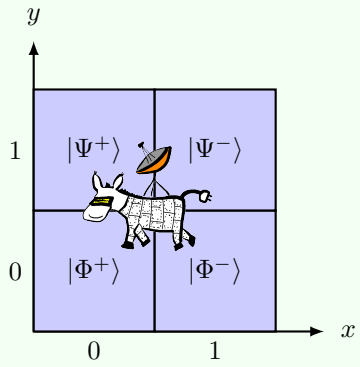
$$|\Phi^+\rangle = U_{\text{Bell}}\,|00\rangle\,, \qquad |\Phi^-\rangle = U_{\text{Bell}}\,|10\rangle\,,$$
$$|\Psi^+\rangle = U_{\text{Bell}}\,|01\rangle\,, \qquad |\Psi^-\rangle = U_{\text{Bell}}\,|11\rangle\,.$$

Übungsaufgabe 3.12: Bell Zustände vorbereiten

Zeichne, wie du die anderen drei Bell Zustände in QUIRKY konstruieren würdest: $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, and $|\Psi^-\rangle$.

Übungsaufgabe 3.13: Bell Zustände unterscheiden

Alices Roboteresel ist während einer Entdeckungsmission abhandengekommen! Er will Alice schnell seine Position wissen lassen, damit sie ihn retten kann. Der Esel ist in einer der vier Gegenden um die Schule. Um mitzuteilen in welcher, sendet der Esel eine Zwei-Qubit Quantennachricht $|x, y\rangle$, wobei $x \in \{0, 1\}$ die x Koordinate und $y \in \{0, 1\}$ die y Koordinate der Lage beschreiben:



Leider hat Alices böse Klassenkameradin Eve das Signal blockiert, d.h. was Alice stattdessen erhält ist einer der vier Bell Zustände wie oben gezeigt. Hilf Alice dabei, korrekt das Signal zu dekodieren und den Esel zu orten! D.h., finde eine Sequenz von Operationen, die jeden der vier Bell Zustände auf den entsprechenden Basiszustand $|x, y\rangle$ zurückführt.

3.2.6 Verschränkung und Korrelationen

Durch die Ähnlichkeit zwischen verschränkten Zuständen und korrelierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen magst du dich bereits gefragt haben, inwiefern die beiden Notationen verwandt sind. Um sie zu vergleichen, lass uns die generelle Relation zwischen Quantenzuständen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskutieren.

Um anzufangen, nehmen wir an, dass wir den Ein-Qubit Zustand $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$ haben und ihn messen. Dann wissen wir von §2.2, dass das Ausgabebit entweder 0 oder 1 ist mit Wahrscheinlichkeiten ψ_0^2 und ψ_1^2. Wir können dies durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung modellieren:

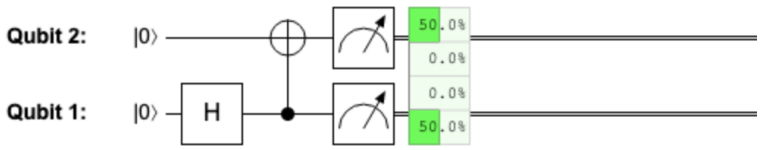
$$\psi_0^2[0] + \psi_1^2[1].$$

Intuitiv modelliert dies die Situation, wo wir das Qubit messen aber nicht das Ergebnis angeschaut haben (hätten wir dies getan, hätten wir nicht ein probabilistisches Bit, aber ein deterministisches, welches entweder 0 oder 1 ist).

Die gleiche Logik funktioniert auch für zwei Qubits. Wenn wir eine Zwei-Qubit Zustand $|\psi\rangle = \psi_{00} |00\rangle + \psi_{01} |01\rangle + \psi_{10} |10\rangle + \psi_{11} |11\rangle$ messen, können wir das Ergebnis beschreiben durch die folgende Zufallsverteilung:

$$p = \psi_{00}^2[00] + \psi_{01}^2[01] + \psi_{10}^2[10] + \psi_{11}^2[11]. \tag{3.57}$$

Wenn wir beispielsweise den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ vorbereiten und messen, dann erhalten wir ein perfekt korreliertes Paar von Zufallsbits in Gl. (3.27). Wir können dies mittels QUIRKY bestätigen:



Das Gleiche gilt natürlich, wenn wir den Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$ stattdessen benutzen. (Was ist mit den anderen beiden Bell Zuständen $|\Psi^+\rangle$ oder $|\Psi^-\rangle$? Wenn man diese misst, erhält man ein Paar von perfekt *anti-korrelierten* Bits, welches man durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\frac{1}{2}[01] + \frac{1}{2}[10]$ beschreiben kann.)

Das vorherige Beispiel war kein Zufall. Es ist tatsächlich so, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung p in Gl. (3.57), die man durch Messen eines Zwei-Qubit Zustands erhält, genau dann korreliert ist, wenn der korrespondierende Quantenzustand $|\psi\rangle$ verschränkt ist. Um dies zu sehen, nehmen wir an dass $|\psi\rangle$ ein Produktzustand ist, sodass $\Delta(|\psi\rangle) = 0$. Dann ist p eine Produktverteilung, da

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = \psi_{00}^2\psi_{11}^2 - \psi_{01}^2\psi_{10}^2 \\ &= (\psi_{00}\psi_{11} - \psi_{01}\psi_{10})\,(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}) \\ &= \Delta(|\psi\rangle)\,\left(\psi_{00}\psi_{11} + \psi_{01}\psi_{10}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dies belegt die Behauptung, dass korrelierte Messergebnisse Verschränkung im gemessenen Zustand implizieren.

Beachte, dass Quantenzustände generell mindestens so nützlich sind wie probabilistische Bits, da jede Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Messen eines geeigneten Quantenzustands erhalten werden kann. D.h., gegeben eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung p können wir immer einen Quantenzustand $|\psi\rangle$ finden, wessen Messergebnis gemäß p verteilt ist. Zum Beispiel können wir für eine Zwei-Bit Verteilung p einfach

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_{00}}\,|00\rangle + \sqrt{p_{01}}\,|01\rangle + \sqrt{p_{10}}\,|10\rangle + \sqrt{p_{11}}\,|11\rangle\,.$$

wählen.

Insbesondere bedeutet dies, dass Verschränkung generell mindestens so nützlich ist wie probabilistische Korrelationen, da jede korrelierte Verteilung über zwei probabilistische Bits erzeugt werden kann, indem wir einen bestimmten Zwei-Qubit Zustand messen.

3.2.7 Die Macht von Verschränkung

In Wirklichkeit sind Quantenbits tatsächlich mächtiger als probabilistische Bits! Im Folgenden werden wir nur einen flüchtigen Blick darauf werfen, in den kommenden Wochen werden wir viele weitere Beispiele betrachten.

Lass uns die Macht von Verschränkung illustrieren, indem wir eine kurze Geschichte erzählen, die auf Übungsaufgabe 3.13 folgt. Dort hast du Alice geholfen, die Position von ihrem Esel zu dekodieren, welcher sich in einem von vier Orten befand, welche durch zwei Bits $a, b \in \{0, 1\}$ gekennzeichnet waren. Alice hat keine Zeit den Esel aufzusammeln, also möchte sie die Position an Bob weiterleiten. Leider hat Alice kaum noch Geld auf ihrem Quantenhandy, also kann sie nur ein einziges Qubit an Bob senden. Aber das Senden eines einzelnen Qubits wird sicherlich *nicht* genug sein um zwei Bits zu kommunizieren. Wir wissen dies, da die einzige Möglichkeit für Bob Informationen zu extrahieren darin besteht, das Qubit zu messen – Aber durch das Messen lernt er nur ein einzelnes Bit und der ursprüngliche Zustand vom Qubit ist verschwunden.

Glücklicherweise teilen sich Alice und Bob schon vorher einen maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$. Das bedeutet für uns, dass Alice das erste Qubit hat und Bob das zweite Qubit. Können wir Alice dabei helfen, den Ort des Esel (sprich, die beiden Bits a und b) zu senden, wobei wir nur ein *einziges* Qubit senden? Die Antwort ist ja! Der Schlüssel dazu ist der Folgende:

Übungsaufgabe 3.14: Einen Bell Zustand in einen Anderen überführen

Zeige, dass Alice den maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ in jeden anderen Bell Zustand $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, oder $|\Psi^-\rangle$ überführen kann mittels lokaler Operationen nur auf ihrem Qubit.

Es ist jetzt klar wie Alice und Bob das Hindernis lösen können. Nehmen wir an, dass Alice und Bob vorher vereinbart haben, wie sie die vier möglichen Werte der zwei Bits $[ab]$ auf die vier Bell Zustände abbilden (nehmen wir an, dass $[00]$ zu $|\Phi^+\rangle$ korrespondiert, $[01]$ zu $|\Psi^+\rangle$, etc.). Mittels Übungsaufgabe 3.14 wendet Alice zunächst eine Operation an auf ihr Qubit des maximal verschränkten Zustands um den Zustand in den Bell Zustand ihrer Wahl zu überführen (sprich, in den Zustand der zum Ort des Esels korrespondiert). Dann sendet sie ihr Qubit an Bob. Bob hat nun beide Qubits in seinem Besitz und er weiß, dass sie in einem von vier Bell Zuständen sind. D.h., er kann einfach die gleichen Operationen wie in Übungsaufgabe 3.13 anwenden und dann die zwei Qubits messen, um den Ort herauszufinden.

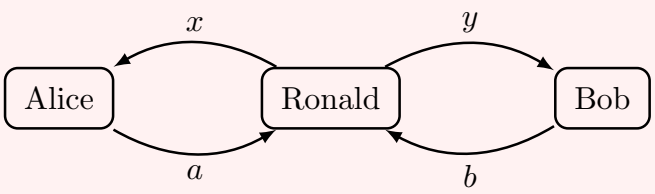
Das obige Verfahren ist bekannt als das Superdense-Coding-Protokoll (engl. für "Superdichte-Kodierung"), da wir zwei deterministische Bits übertragen, indem wir ein Qubit senden (mit den Extrakosten, dass wir einen maximal verschränkten Zustand, den Alice und Bob sich teilen, „aufbrauchen"). Hätten Alice und Bob dafür auch probabilistische Bits verwenden können anstelle des verschränkten Zustands, um die Herausforderung zu lösen (z.B. ein Paar von perfekt korrelierten Bits)? Interessanterweise lautet die Antwort nein. Wir werden dies nicht im Detail beweisen, aber man kann zeigen, dass wenn wir die probabilistischen Bits verwenden hätten können, um das Problem perfekt zu lösen, dann hätte auch eine deterministische Strategie dies tun können. Diese Strategie hätte ein einzelnes Bit gesendet, was natürlich nicht zwei Bits an Information beinhalten kann. Also demonstriert superdense conding, dass Quantenverschränkung einen Vorteil für Kommunikation verschafft.

In der folgenden Aufgabe begegnest du einer weiteren berühmten Situation, wo Quantenverschränkung einen eindeutigen Vorteil verschafft.

Hausaufgabe 3.7: Ein verschränktes Spiel (anspruchsvoll)

Alice und Bob langweilen sich im Unterricht, also fragen sie ihren Lehrer für Quantenmechanik Ronald nach einem anspruchsvollen Puzzle. Nach nur einer kurzen Pause erklärt Ronald ihnen ein interessantes Spiel. Das Ziel des Spiels ist es, dass Alice und Bob so gut wie möglich kooperieren (sie spielen *nicht* gegeneinander). Während des Spiels dürfen sie jedoch *nicht* miteinander kommunizieren. Die Regeln des Spiels sind wie folgt:

- Um anzufangen, wirft Ronald heimlich zwei faire Münzen. Er nennt Alice das Ergebnis des ersten Wurfs (Bit x) und Bob das Ergebnis des zweiten Wurfs (Bit y). Wir nennen diese Bits die Eingabebits.
- Nachdem die Beiden die Bits erhalten haben, müssen sowohl Alice als auch Bob sich selbst ein Bit überlegen und dies angeben (Bits a und b).
- Alice und Bob gewinnen das Spiel unter folgenden Bedingungen: Wenn $x = y = 1$, dann gewinnen sie wenn $a \neq b$; ansonsten gewinnen sie, wenn $a = b$.



x	y	Gewinnbedingung
0	0	$a = b$
0	1	$a = b$
1	0	$a = b$
1	1	$a \neq b$

Bevor das Spiel anfängt, diskutieren Alice und Bob kurz ihre Strategie. Zuerst erwägen sie es, zwei Funktionen $f, g : \{0,1\} \to \{0,1\}$ auf ihre Bits x und y anzuwenden und ihre Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x)$ und $b = g(y)$.

1. Zeige, dass Alice und Bob in diesem Fall das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 75% gewinnen können, aber nicht höher.

Als Nächstes erwägen sie es, ihre Antworten zu berechnen mittels geteiltem Zufall. Bob schlägt vor, kompliziertere Funktionen f und g mit einem zusätzlichen binären Eingabebit zu verwenden und die Antworten wie folgt zu berechnen: $a = f(x,r)$ und $b = g(y,s)$. Hier sind r und s zwei zufällige Bits die gemeinsam einer Zwei-Bit Zufallsverteilung entsprangen.

2. Zeige, dass die Beiden noch immer nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% gewinnen können, egal welche Funktionen f und g sie benutzen und was die Zufallsverteilung für r und s ist.

Langsam wird den Beiden bewusst, dass Ronald sicherlich eine quantenmechanische Strategie im Kopf hatte. Alice hat eine geniale Idee und schlägt vor, dass sie und Bob sich einen maximal verschränkten Zustand $|\Phi^+\rangle$ bevor das Spiel startet teilen. Sie schlägt vor, dass wenn sie ihre Bits erhalten, sie ihr Qubit rotiert mittels einem Winkel θ_x (welcher von ihrem Eingabebit x abhängt) und dann misst um ihre Antwort a zu erhalten. Bob stattdessen soll anhand eines anderen Winkels ω_y rotieren (welcher von seinem Eingabebit y abhängt) und dann messen um seine Antwort b zu erhalten.

3. Schreibe den Zustand nach den Rotationen von Alice und Bob auf. Der Zustand soll von der Form (3.30) sein. Bestätige, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von der folgenden Form ist:

$$\frac{1}{4}\left(\cos^2(\theta_0-\omega_0)+\cos^2(\theta_0-\omega_1)+\cos^2(\theta_1-\omega_0)+\sin^2(\theta_1-\omega_1)\right).$$

   Hinweis: Benutze die trigonometrischen Formeln aus Gl. (2.16) und (2.22).

Alice und Bob finden schnell heraus, dass $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \pi/4$, und $\omega_0 = \pi/8$ gute Wahlen sind. Sie haben jedoch Probleme mit dem letzten Winkel und die Zeit läuft ab.

4. Finde eine Winkel ω_1, sodass die Beiden mit einer Wahrscheinlichkeit gewinnen, die höher als 75% ist.

In den ersten beiden Teilen der Hausaufgabe hast du gezeigt, dass jede Strategie mit klassischen Bits nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% gewinnen kann. Dies ist ein Beispiel der *Bell-Ungleichheit*. Die obige Version geht zurück auf John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, and Richard Holt, d.h. das Spiel, welches Alice und Bob mit Ronald spielen wird oft *CHSH-Spiel* genannt. Die quantenmechanische Strategie, die du in der Hausaufgabe entdeckt hast, *verletzt* diese Bell Ungleichheit. Es ist ein empirischer Fakt, dass Bell Ungleichheiten mittels Quantenmechanik verletzt werden. Dies wurde zuerst durch Alain Aspect in den 80ern entdeckt und kürzlich unter sehr strengen Konditionen in einem Experiment von Ronald Hanson und seinem Team in der TU Delft bewiesen.

Interessanterweise können Alice und Bob nicht nur das CHSH Spiel mit höherer Wahrscheinlichkeit gewinnen, wenn sie einen maximal verschränkten Zustand haben, sie können Ronald sogar davon überzeugen, dass sie Quantentricks verwenden müssen um das Spiel so gut spielen zu können! Da die probabilistischen Strategien nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% gewinnen können, ist es so, dass wenn die Beiden mit einer höheren Wahr-

scheinlichkeit gewinnen, dann ist die einzig mögliche Erklärung, dass sie etwas Mächtigeres benutzen. Mit weiteren Tricks können sie Ronald sogar davon überzeugen, dass sie den maximal verschränkten Zustand benutzen müssen und die Rotationen mit den bestimmten Winkeln von oben. Dies bedeutet, dass sie Ronald unwiderleglich beweisen können, dass sie kleine Quantencomputer besitzen, welche einzelne Qubits manipulieren können, und verschränkte Qubits teilen. Dies ist eine wichtige Beobachtung, da sie einen das CHSH Spiel benutzen lässt, um zu beweisen, dass man tatsächlich einen Quantencomputer gebaut hat! Sollten tatsächlich zwei deiner Klassenkameraden behaupten, dass sie jeweils einen Quantencomputer in ihrer Garage gebaut haben, dann kannst du sie einfach dazu auffordern, das CHSH Spiel gegen dich zu spielen. Wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit, die signifikant größer als 75% ist, gewinnen, dann weißt du, dass sie tatsächlich die Wahrheit sagen und echte Quantencomputer besitzen. Wenn sie jedoch nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% gewinnen, dann kannst du ihre Behauptungen entkräften. Ist das nicht verblüffend?

Diese Arten von Verifikations-Prozeduren sind etwas, woran Forscher auf der ganzen Welt momentan aktiv arbeiten. Dies ist ein sehr wichtiges Problem, da einige große Firmen, z.B. IBM, Google und Microsoft versuchen, einen Quantencomputer zu bauen. Wenn sie behaupten, einen gebaut zu haben, würdest du ihnen wahrscheinlich mehr glauben als deine Klassenkameraden. Es ist jedoch trotzdem toll, eine Möglichkeit zu haben, dies zu verifizieren.

3.3 Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung Übungsaufgabe 3.2

1. Wir bezeichnen mit p die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Alices zwei Münzwürfen. Wir benutzen Abb. 3.3 um die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Wir wissen, dass der erste Münzwurf von Alice verteilt ist nach u, was bedeutet, dass wenn wir das erste Bit messen, wir jedes Bit mit Wahrscheinlichkeit je $1/2$ erhalten sollten:

   $$p_{00} + p_{01} = \frac{1}{2}, \quad p_{10} + p_{11} = \frac{1}{2}.$$

   Wenn der erste Münzwurf eine 0 ergab, dass sollte der Zustand des zweiten Bits beschrieben werten durch die Münze q. D.h., wir müssen haben:

   $$\frac{p_{00}[0] + p_{01}[1]}{p_{00} + p_{01}} = \frac{3}{4}[0] + \frac{1}{4}[1],$$

   Davon können wir ableiten, dass $p_{00} = \frac{3}{8}$ and $p_{01} = \frac{1}{8}$. Analog dazu gilt: Wenn der erste Münzwurf eine 1 war, dann wird der Zustand des zweiten Bits beschrieben durch die Münze r, also

   $$\frac{p_{10}[0] + p_{11}[1]}{p_{00} + p_{01}} = \frac{1}{3}[0] + \frac{2}{3}[1],$$

   ergo $p_{10} = \frac{1}{6}$ and $p_{11} = \frac{2}{6}$. Zusammen gilt:

   $$p = \frac{3}{8}[00] + \frac{1}{8}[01] + \frac{1}{6}[10] + \frac{2}{6}[11],$$

2. Der Wert von Bob's Bit ist der Gleiche wie das Ergebnis von Alices zweitem Münzwurf, also folgen wir einfach Abb. 3.3 um die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse zu bestimmen, wenn wir das zweite Bit messen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Bobs Ausgabe 0 ist, ist also

   $$p_{00} + p_{10} = \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$$

   und die Wahrscheinlichkeit, dass seine Ausgabe 1 ist, ist $1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$. Wir können dies durch die folgende Zufallsverteilung beschreiben:

   $$\frac{13}{24}[0] + \frac{11}{24}[1].$$

3. Wir benutzen wieder Abb. 3.3. Wenn das zweite Bit gemessen wird und das Ergebnis 0 ist, dann ist der Zustand des ersten Bits gegeben durch

   $$\frac{p_{00}[0] + p_{10}[1]}{p_{00} + p_{10}} = \frac{9}{13}[0] + \frac{4}{13}[1].$$

   Es ist also wahrscheinlicher, dass Alices erster Münzwurf das Ergebnis 0 zeigt.

   Analog dazu, wenn das Ergebnis vom Messen des zweiten Bits 1 ist, dann wird der Zustand des erstens Bits beschrieben durch

   $$\frac{p_{01}[0] + p_{11}[1]}{p_{01} + p_{11}} = \frac{3}{11}[0] + \frac{8}{11}[1].$$

   In diesem Fall ist es wahrscheinlicher, dass Alices erster Münzwurf 1 ist.

Lösung Übungsaufgabe 3.1

$$\mathrm{NOT}_1 \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{10} \\ p_{11} \\ p_{00} \\ p_{01} \end{pmatrix}.$$

Lösung Übungsaufgabe 3.3

$$\mathrm{SWAP} \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{10} \\ p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix}.$$

Lösung Übungsaufgabe 3.4

1. $\mathrm{CNOT}_{2\to1}[a,b] = [a \oplus b, b] = [b \oplus a, b]$.
2. Dies kann getan werden, indem man zuerst eine SWAP-Operation ausführt, dann $\mathrm{CNOT}_{1\to2}$, und am Ende wieder SWAP. Tatsächlich, wenn wir Gl. (3.17) und (3.19) nutzen, gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to2}(\mathrm{SWAP}[a,b])) = \mathrm{SWAP}(\mathrm{CNOT}_{1\to2}[b,a]) \\ &= \mathrm{SWAP}[b, b \oplus a] = [b \oplus a, b]. \end{aligned}$$

Lösung Übungsaufgabe 3.5

Nutzen wir Abb. 3.3, so können wir den Zustand des zweiten Bits nach dem Messen berechnen als

$$\frac{p_{a0}[0] + p_{a1}[1]}{p_{a0} + p_{a1}} = \frac{q_a r_0[0] + q_a r_1[1]}{q_a r_0 + q_a r_1} = \frac{r_0[0] + r_1[1]}{r_0 + r_1} = r_0[0] + r_1[1] = r,$$

wobei wir q_a gestrichen haben und benutzt haben, dass $r_0 + r_1 = 1$.

Lösung Übungsaufgabe 3.6

Der Zustand vor der kontrollierten NOT-Operation ist

$$\left(\frac{1}{2}[0] + \frac{1}{2}[1]\right) \otimes [0] = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10].$$

Nachdem wir die kontrollierte NOT-Operation angewendet haben, erhalten wir

$$\mathrm{CNOT}_{1\to2}\left(\frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[10]\right) = \frac{1}{2}[00] + \frac{1}{2}[11].$$

Lösung Übungsaufgabe 3.7

1.

$$\begin{aligned}|+\rangle \otimes |-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle .\end{aligned}$$

2.

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle .$$

Es handelt sich also tatsächlich um einen Produktzustand.

Lösung Übungsaufgabe 3.8

Wir starten mit $|00\rangle$. Nach der NOT-Operation auf dem zweiten Qubit erhalten wir $|01\rangle$. Die Hadamard-Operation auf dem ersten Qubit wandelt diesen Zustand um in $|+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Mit der finalen Z-Operation erhalten wir den folgenden zwei-Qubit Zustand direkt vor dem Messen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle .$$

Also erhalten wir entweder 01 oder 11, beide jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50%.

Lösung Übungsaufgabe 3.9

Wir zeigen nur, wie wir Gl. (3.39) verifizieren können (die andere Gleichung verläuft analog). Dafür schreiben wir $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ und $|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned}U_1(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= U_1(\alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle) \\ &= \alpha_0\beta_0 U_1|00\rangle + \alpha_0\beta_1 U_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0 U_1|10\rangle + \alpha_1\beta_1 U_1|11\rangle \\ &= \alpha_0\beta_0 U|0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_0\beta_1 U|0\rangle \otimes |1\rangle + \alpha_1\beta_0 U|1\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_1\beta_1 U|1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \alpha_0 U|0\rangle \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) + \alpha_1 U|1\rangle \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \\ &= \alpha_0 U|0\rangle \otimes |\beta\rangle + \alpha_1 U|1\rangle \otimes |\beta\rangle \\ &= (\alpha_0 U|0\rangle + \alpha_1 U|1\rangle) \otimes |\beta\rangle \\ &= U|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\end{aligned}$$

durch Gl. (3.33), die Definition von U_1 und Linearität.

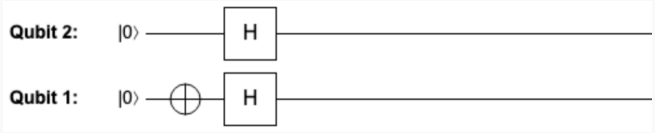
Lösung Übungsaufgabe 3.10

1. Der Zustand kann geschrieben werden als

$$\frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right).$$

2. Dies ist äquivalent zu

$$H|1\rangle \otimes H|0\rangle = H\,\mathrm{NOT}\,|0\rangle \otimes H|0\rangle = (H\,\mathrm{NOT} \otimes H)\,|00\rangle.$$

3. 

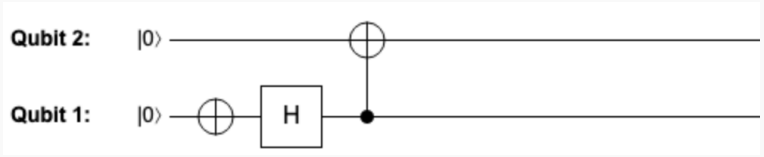
Lösung Übungsaufgabe 3.11

Um zu zeigen, dass $HZ \neq ZH$, reicht es, dass wir verifizieren, dass die Anwendung beider Operationen auf den Zustand $|0\rangle$ unterschiedliche Ergebnisse liefert:

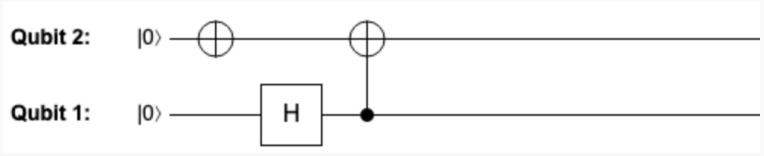
$$HZ|0\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$
$$ZH|0\rangle = Z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Lösung Übungsaufgabe 3.12

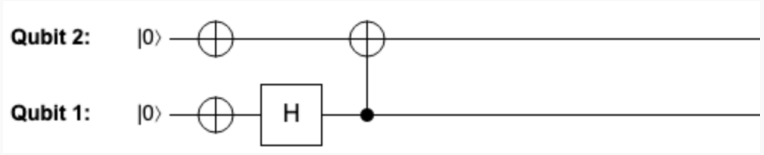
- $|\Phi^-\rangle$:



- $|\Psi^+\rangle$:



- $|\Psi^-\rangle$:



Lösung Übungsaufgabe 3.13

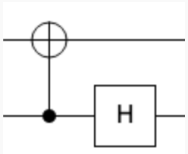
Beache, dass dies das Gleiche ist, wie die Operation U_{Bell} in Gl. (3.56) zu invertieren. Erinneren wir uns, dass $U_{\text{Bell}} = \text{CNOT}_{1\to 2}\,(H \otimes I)$. Dies ist eine Zusammensetzung von Operationen, also wissen wir durch Übungsaufgabe 2.5, dass

$$U_{\text{Bell}}^{-1} = (H \otimes I)^{-1}\,\text{CNOT}_{1\to 2}^{-1} = (H^{-1} \otimes I)\,\text{CNOT}_{1\to 2}^{-1}.$$

Durch Gl. (3.49) wissen wir, dass $\text{CNOT}_{1\to 2}$ selbstinvers ist, also $\text{CNOT}_{1\to 2}^{-1} = \text{CNOT}_{1\to 2}$. Es ist auch wahr, dass $H^{-1} = H$ (dies gilt tatsächlich für jede Art von Reflektion). Dies impliziert, dass wir U_{Bell} rückgängig machen können, indem wir die beiden Operationen in umgekehrter Reihenfolge anwenden:

$$U_{\text{Bell}}^{-1} = (H \otimes I)\,\text{CNOT}_{1\to 2}.$$

D.h., wir wenden zuerst $\text{CNOT}_{1\to 2}$ und dann H an, wie in:



Lösung Übungsaufgabe 3.14

Beachte Gl. (3.52) bis (3.55): Die Bell Zustände unterscheiden sich nur durch Bit Flips und Vorzeichen. Erinnere dich dann, dass wir ein Bit umdrehen können durch eine lokale NOT-Operation und dass wir Vorzeichen einführen können, indem wir lokale Z-Operationen anwenden können, wo Z definiert ist wie in Gl. (2.12). Um $|\Phi^-\rangle$ zu erzeugen, kann Alice einfach eine Z-Operation auf ihr Qubit anwenden:

$$(Z \otimes I)\,|\Phi^+\rangle = (Z \otimes I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle = |\Phi^-\rangle\,.$$

Um $|\Psi^+\rangle$ zu erzeugen, wendet Alice statdessen die NOT-Operation auf ihrem Qubit an:

$$(\text{NOT} \otimes I)\,|\Phi^+\rangle = (\text{NOT} \otimes I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle = |\Psi^+\rangle\,.$$

Um $|\Psi^-\rangle$ zu erzeugen, wendet Alice erst die NOT-Operation an und dann die Z-Operation auf ihrem Qubit:

$$(Z\,\text{NOT} \otimes I)\,|\Phi^+\rangle = (Z \otimes I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|01\rangle = |\Psi^-\rangle\,.$$